Prof. Werner M. Seiler, Ph.D.
FB 10 Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

UNIKASSEL VERSITÄT

1. November 2011

Grundlagen der Algebra und Computeralgebra

2. Übungsblatt

Aufgabe 1. (4 Punkte)

(i) Sei $G = \{g_1 = e, g_2, \dots, g_n\}$ eine endliche Gruppe. Die *Gruppentafel* von G enthält im Schnittpunkt der $i$ten Zeile und der $j$ten Spalte das Produkt $g_i g_j$. Zeigen Sie, daß in jeder Zeile und in jeder Spalte der Tafel jedes Gruppenelement genau einmal vorkommt.

(ii) Beweisen Sie Lemma I.1.9 aus der Vorlesung: der Schnitt beliebig vieler Untergruppen ist wieder eine Untergruppe.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Die Gruppe $Q = \langle a, b, c, d \rangle$ werde von den vier Elementen a, b, c, d erzeugt, wobei diese den folgenden Relationen genügen (wir bezeichnen mit 1 das neutrale Element von Q):

$$a^2 = b^2 = c^2 = abc = d\,, \quad d^2 = 1\,, \quad da = ad\,, \quad db = bd\,, \quad dc = cd\,.$$

Bestimmen Sie die Gruppentafel sowie alle Untergruppen von Q.

Abgabe: Donnerstag 10.11. in der Übung

Bitte wenden!

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Beweisen Sie die folgenden Aussagen für eine Gruppe G:

(i) Seien $N_1, N_2 \trianglelefteq G$ zwei Normalteiler. Dann sind auch $N_1 \cdot N_2$ und $N_1 \cap N_2$ Normalteiler in G.

(ii) Sei $H \leq G$ eine Untergruppe mit Index $(G : H) \leq 2$. Dann ist H ein Normalteiler in G.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Sei G eine Gruppe und $S \subseteq G$ eine beliebige Teilmenge. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Der *Normalisator* von S, $N_G(S) = \{g \in G \mid gS = Sg\}$, ist eine Untergruppe von G. Wenn S selbst eine Untergruppe ist, dann ist $N_G(S)$ die größte Untergruppe von G, in der S ein Normalteiler ist.

(ii) Der *Zentralisator* von S, $Z_G(S) = \{g \in G \mid \forall s \in S : gs = sg\}$, ist auch eine Untergruppe von G.

(iii) Das *Zentrum* von G, $Z_G(G)$, ist ein abelscher Normalteiler von G.

Abgabe: Donnerstag 17.11. in der Übung