Prof. Werner M. Seiler, Ph.D.
FB 10 Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

UNI KASSEL VERSITÄT

15. November 2011

Grundlagen der Algebra und Computeralgebra

3. Übungsblatt

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Es sei die Abbildung $\varphi : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{R}^\times,\ z = x + iy \mapsto |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ gegeben; hierbei bezeichnet $\mathbb{K}^\times = (\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ die multiplikative Gruppe des Körpers $\mathbb{K}$.

(i) Zeigen Sie, daß φ ein Gruppenhomomorphismus ist.

(ii) Bestimmen Sie den Kern $\ker \varphi$ und das Bild $\operatorname{im} \varphi$ von φ.

(iii) Zeigen Sie, daß für jede nicht negative, reelle Zahl $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt $\varphi^{-1}(r) = r \ker \varphi$ (die Linksnebenklasse von r zu $\ker \varphi \leq \mathbb{C}^\times$). Begründen Sie, daß man so alle Linksnebenklassen erhält, und beschreiben Sie diese Klassen geometrisch.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Es sei $\varphi : G \to G'$ ein Gruppenhomomorphismus.

(i) Sei $H \leq G$ eine Untergruppe in G. Beweisen Sie, daß auch $\varphi(H) \subseteq G'$ eine Untergruppe ist. Zeigen Sie mit einem Gegenbeispiel, daß die entsprechende Aussage für Normalteiler falsch ist.

(ii) Sei nun $H' \leq G'$ eine Untergruppe (bzw. ein Normalteiler) in G'. Zeigen Sie, daß $\varphi^{-1}(H') \subseteq G$ wieder eine Untergruppe (bzw. ein Normalteiler) ist.

Abgabe: Donnerstag 24.11. in der Übung

Bitte wenden!

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Sei G eine Gruppe und Z ihr Zentrum (vgl. Blatt 2). Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) G ist genau dann abelsch, wenn G/Z zyklisch ist.

(ii) Der Index $(G : Z)$ von Z in G ist keine Primzahl.

(iii) Es sei $|G| = pq$ mit zwei Primzahlen p, q. Dann ist G abelsch oder $Z = \{e\}$.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Sei G eine Gruppe mit Zentrum Z, $g \in G$ ein beliebiges Element und $\gamma_g : G \to G,\ h \mapsto ghg^{-1}$ die zu g gehörende Konjugationsabbildung. Beweisen Sie die folgende Aussagen:

(i) γ_g ist ein Automorphismus, d.h. $\gamma_q \in \mathrm{Aut}(G)$.

(ii) Die Abbildung $\Gamma : G \to \mathrm{Aut}(G),\ g \mapsto \gamma_g$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

(iii) Das Bild $\mathrm{im}\,\Gamma$ ist ein Normalteiler in $\mathrm{Aut}(G)$.

(iv) $\ker \Gamma = Z$.

Abgabe: Donnerstag 1.12. in der Übung