Prof. Werner M. Seiler, Ph.D.
FB 10 Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

UNIKASSEL VERSITÄT

29. November 2011

Grundlagen der Algebra und Computeralgebra

4. Übungsblatt

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Es sei $\Bbbk$ ein Körper, $M = \Bbbk^{m\times n}$ und $G = Gl(m, \Bbbk) \times Gl(n, \Bbbk)$ (die Gruppenstruktur auf G ist wie folgt erklärt: wenn $g_1 = (A_1, B_1)$ und $g_2 = (A_2, B_2)$, dann gilt $g_1 g_2 = (A_1A_2, B_1B_2)$).

(i) Zeigen Sie, daß durch die Abbildung $\Phi : G \times M \to M$ mit $\Phi\big((A, B), D\big) = ADB^{-1}$ eine Operation der Gruppe G auf der Menge M definiert wird.

(ii) Bestimmen Sie die Anzahl der Bahnen und ein Vertretersystem der Bahnen für diese Operation (Hinweis: benutzen Sie Ihre Kenntnisse aus der Linearen Algebra!).

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Sei G eine endliche Gruppe der Ordnung n und M eine endliche Menge mit k Elementen, auf der G operiert. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Sei $n = 55$. Für $k = 39$ gibt es mindestens einen Fixpunkt und für $k = 18$ sogar mindestens zwei.

(ii) Wenn k kleiner ist als die kleinste Primzahl, die n teilt, dann ist die Operation trivial.

Abgabe: Donnerstag 8.12. in der Übung

Bitte wenden!

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring.

(i) Beweisen Sie Lemma II.1.9 und Lemma II.1.10 aus der Vorlesung: Es seien $S \subseteq R$ eine Teilmenge und $I, J \lhd R$ zwei Ideale; dann sind auch $\langle S \rangle_R$, $I + J$ und $I \cdot J$ Ideale in R.

(ii) Sei $I \lhd R$ ein Ideal. Die Menge

$$\sqrt{I} = \big\{ r \in R \mid \exists\, n \in \mathbb{N} : r^n \in I \big\}$$

heißt das *Radikal* von I. Zeigen Sie, daß das Radikal wieder ein Ideal ist.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

(i) Sei $\Bbbk$ ein Körper. Zeigen Sie, daß der univariate Polynomring $\Bbbk[x]$ ein Hauptidealring ist.

(ii) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}[x]$ *kein* Hauptidealring ist.

Abgabe: Donnerstag 15.12. in der Übung