Prof. Werner M. Seiler, Ph.D.
FB 10 Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

UNI KASSEL VERSITÄT

13. Dezember 2011

Grundlagen der Algebra und Computeralgebra

5. Übungsblatt

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Die Kürzungsregel $rs = rt \Rightarrow s = t$ gilt dann und nur dann, wenn r kein Nullteiler ist. (*Hinweis:* zeigen Sie für die eine Richtung folgende stärkere Aussage: wenn r ein Nullteiler ist, dann besitzt die Gleichung $rx = s$ entweder keine oder mehrere Lösungen.)

(ii) Der Ring R ist genau dann ein Körper, wenn für alle $r, s \in R$ mit $r \neq 0_R$ die Gleichung $rx = s$ eine eindeutige Lösung in R besitzt.

(iii) Der Ring R habe mindestens fünf Elemente. Die quadratische Gleichung $x^2 - rx + s = 0$ hat genau dann für alle $r, s \in R$ höchstens zwei Lösungen, wenn R ein Integritätsbereich ist.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Sei R ein kommutativer Ring. Der Kern des Ringhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \to R$ mit $\varphi(n) = n \cdot 1_R = 1_R + \cdots + 1_R$ ist ein Ideal in dem Hauptidealring $\mathbb{Z}$. Also gibt es ein Element $p \in \mathbb{N}_0$ mit $\ker \varphi = \langle p \rangle$. Man nennt p die *Charakteristik* $\operatorname{char} R$ des Rings R. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Wenn R ein Integritätsbereich ist, dann ist $\operatorname{char} R$ entweder eine Primzahl oder Null.

(ii) Es gilt für alle $r \in R$, daß $pr = 0_R$.

(iii) Wenn R ein endlicher Ring ist, dann ist $|R|$ eine Potenz von $\operatorname{char} R$.

(iv) Es gelte $\operatorname{char} R = p \neq 0$. Dann ist die *Frobenius-Abbildung* $F : R \to R,\ r \mapsto r^p$ ein Ringhomomorphismus, der im Falle eines Integritätsbereichs injektiv ist.

Abgabe: Donnerstag 22.12. in der Übung

Aufgabe 3. (4 Punkte)

(i) Zeigen Sie, daß in einem Hauptidealring R ein Ideal $I \neq \langle 0 \rangle$ genau dann ein Primideal ist, wenn es ein maximales Ideal ist.

(ii) Finden Sie einen Ring R und ein Ideal $I \lhd R$, so daß R/I ein Körper mit 8 Elementen ist. Geben Sie die Gruppentafel der Einheitengruppe $(R/I)^\times$ an.
(Hinweis: betrachten Sie univariate Polynomringe über einem endlichen Körper $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ für eine geeignet gewählte Primzahl p.)

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Sei K ein Körper. Gegeben seien n paarweise verschiedene Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ sowie n beliebige Elemente $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K$. Zeigen Sie, daß genau ein Polynom $f \in K[x]$ mit $\deg f \leq n$ und $f(\alpha_i) = \beta_i$ für $1 \leq i \leq n$ existiert, nämlich

$$f = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \ell_i \qquad \text{mit} \quad \ell_i = \prod_{j \neq i} \frac{x - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j} \; .$$

Abgabe: Donnerstag 12.01. in der Übung