Prof. Werner M. Seiler, Ph.D.
FB 10 Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

UNI KASSEL VERSITÄT

10. Januar 2012

Grundlagen der Algebra und Computeralgebra

6. Übungsblatt

Aufgabe 1. (4 Punkte)

(i) Es seien $c \in \mathbb{C}$ und $\mathbb{Z}[c] = \{m + nc \mid m, n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$. Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}[c]$ genau dann ein Unterring von $\mathbb{C}$ ist, wenn $k, \ell \in \mathbb{Z}$ existieren mit $c^2 + kc + \ell = 0$.

(ii) Beweisen Sie, daß $\mathbb{Z}[i]$ mit der Gradfunktion $\mathcal{N} : \mathbb{Z}[i] \to \mathbb{N}_0$, $x \mapsto |x|^2$, ein Euklidischer Ring ist.

(iii) Zeigen Sie, daß 2 in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ irreduzibel, aber nicht prim ist.
(*Hinweis:* Die Gradfunktion $\mathcal{N} : \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \to \mathbb{N}_0$, $z \mapsto |z|^2$ ist multiplikativ: $\mathcal{N}(xy) = \mathcal{N}(x)\mathcal{N}(y)$. Zeigen Sie, daß 6 sich auf zwei verschiedene Arten in irreduzible Elemente zerlegen läßt.)

Aufgabe 2. (4 Punkte)
In einer Höhle finden 16 Zwerge einen Schatz aus Goldmünzen. Bei dem Versuch, diesen gerecht zu verteilen, bleiben 4 Münzen übrig. Bei dem daraufhin entstehenden Gerangel gerät einer der Zwerge auf eine aus der Höhle herausführende Rutsche und entschwindet den Blicken der anderen. Die übrigen 15 Zwerge versuchen erneut die Teilung des Schatzes, wobei dieses Mal 7 Münzen übrigbleiben. Wieder setzt ein Gerangel ein und wieder gerät einer der Zwerge „auf die schiefe Bahn.“ Als die restlichen danach merken, daß die Verteilung immer noch nicht erfolgreich sein kann, beschließen sie, den beiden verlorenen Zwergen je eine Münze hinterher zu schicken. Nun geht die Teilung auf. Wie viele Münzen enthält der Schatz mindestens?

(*Vorsicht:* naive Anwendung von Algorithmen führt hier nicht zur richtigen Lösung!)

Abgabe: Donnerstag 19.01. in der Übung

Bitte wenden!

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen über einen Ring R äquivalent sind:

(i) R ist noethersch.

(ii) Jedes Ideal $I \lhd R$ ist endlich erzeugt (d.h. es gibt ein endliches Erzeugendensystem S mit $I = \langle S \rangle$).

(iii) Jede nichtleere Menge $\mathcal{M}$ von Idealen aus R besitzt maximale Elemente bezüglich der Inklusion.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

(i) Für welche Primzahlen $p \leq 10$ ist das Polynom $f = x^3 + x^2 + x + 2 \in K[x]$ mit $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ irreduzibel?

(ii) Sei nun $p = 7$. Zeigen Sie, daß der Faktorring $R = K[x]/\langle f \rangle$ ein Körper ist. Wir bezeichnen die Restklasse von x in R mit $\bar{x}$. Geben Sie das inverse Element zu $\bar{x} + 1$ als Linearkombination von 1, $\bar{x}$ und $\bar{x}^2$ mit Koeffizienten in K an.

Abgabe: Donnerstag 26.01. in der Übung