Prof. Werner M. Seiler, Ph.D.
FB 10 Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

UNI KASSEL VERSITÄT

24. Januar 2012

Grundlagen der Algebra und Computeralgebra

7. Übungsblatt

Aufgabe 1. (4 Punkte)
Sei R ein faktorieller Ring und $K = \mathrm{Quot}(R)$ der zugehörige Quotientenkörper. Wir erweitern den Begriff des Inhalts eines Polynoms auf Polynome $f = c_n x^n + \cdots + c_1 x + c_0 \in K[x]$. Dazu schreiben wir jeden Koeffizienten c_i als gekürzten Bruch r_i/s_i mit $\mathrm{ggT}(r_i, s_i) = 1$. Multiplikation von f mit dem Hauptnenner $s = \mathrm{kgV}(s_0, \ldots, s_n)$ ergibt dann ein Polynom $sf \in R[x]$ und wir definieren $c(f) = c(sf)/s \in K$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Es gilt $f = c(f) \cdot \bar{f}$ mit einem primitiven Polynom $\bar{f} \in R[x]$.

(ii) Es gilt $f \in R[x]$ genau dann, wenn $c(f) \in R$.

(iii) Wenn f ein normiertes Polynom ist (d.h. $c_n = 1$), dann gilt $c(f) = 1/s$.

(iv) Sei $g \in R[x]$ ein normiertes Polynom mit $g = h_1 h_2$ für zwei Polynome $h_1, h_2 \in K[x]$. Wenn eines der Polynome h_i normiert ist, dann gilt $h_1, h_2 \in R[x]$.

Aufgabe 2. (4 Punkte)
Beweisen Sie folgendes Irreduzibilitätskriterium für ein primitives Polynom $f = r_n x^n + \cdots + r_0 \in R[x]$ über einem faktoriellen Ring R. Es sei $P \lhd R$ ein Primideal mit $r_n \notin P$. Wir schreiben $\overline{R} = R/P$ und betrachten den kanonischen Homomorphism $\rho : R[x] \to \overline{R}[x]$, der alle Koeffizienten durch ihre Restklassen in $\overline{R}$ ersetzt. Wenn $\overline{f} = \rho(f)$ in $\overline{R}[x]$ irreduzibel ist, dann ist auch f in $R[x]$ irreduzibel.

Abgabe: Donnerstag 02.02. in der Übung