Prof. Werner M. Seiler, Ph.D.
FB 10 Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

UNIKASSEL VERSITÄT

23. Oktober 2013

Gröbner-Basen

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

(i) Mit $\prec_{\text{revlex}}$ bezeichnen wir die *reverslexikographische Ordnung*, die wie folgt definiert ist:

$$\mathbf{x}^\mu \prec_{\text{revlex}} \mathbf{x}^\nu \Longleftrightarrow \text{der letzte von Null verschiedene Eintrag von } \mu - \nu \text{ ist positiv.}$$

Begründen Sie, warum $\prec_{\text{revlex}}$ *keine* Termordnung definiert.

(ii) Seien $s \neq t$ zwei verschiedene Terme mit $s \mid t$. Zeigen Sie, daß für beliebige Termordnungen $\prec$ dann gilt $s \prec t$.

Aufgabe 2

Sei $f \in \mathcal{P} = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ ein Polynom vom Grad $\deg(f) = d$ und x_0 eine weitere Variable. Dann ist

$$f^{(h)} = x_0^d f\Big(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\Big) \in \mathcal{P}^{(h)} = \Bbbk[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

die *Homogenisierung* von f. Das so definierte Polynom $f^{(h)}$ ist offensichtlich homogen, d.h. alle seine Terme besitzen denselben Grad. Sei nun $\prec$ eine beliebige Termordnung auf $\mathcal{P}$. Wir setzen $\prec$ wie folgt auf den erweiterten Polynomring $\mathcal{P}^{(h)}$ fort:

$$x_0^k \mathbf{x}^\mu \prec_h x_0^\ell \mathbf{x}^\nu \iff \big(\mathbf{x}^\mu \prec \mathbf{x}^\nu\big) \vee \big(\mathbf{x}^\mu = \mathbf{x}^\nu \wedge k < \ell\big) .$$

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $\prec_h$ definiert eine Termordnung auf $\mathcal{P}^{(h)}$.

(ii) Falls $\prec$ eine Totalgradordnung ist, gilt $\operatorname{lt}_{\prec_h} f^{(h)} = \operatorname{lt}_{\prec} f$ für alle Polynome $f \in \mathcal{P}$.