Prof. Werner M. Seiler, Ph.D.
FB 10 Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

UNIKASSEL VERSITÄT

30. Oktober 2013

# Gröbner-Basen

## 2. Übungsblatt

### Aufgabe 1

Ein Polynom $f \in \mathcal{P} = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ heißt *symmetrisch*, wenn es unter beliebigen Permutationen der Variablen invariant bleibt:

$$f\bigl(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}\bigr) = f(x_1, \dots, x_n) \qquad \forall \pi \in S_n\,.$$

Einfache Beispiele sind die $n$ *elementarsymmetrischen Polynome* $\sigma_i$ definiert durch:

$$\begin{aligned}
\sigma_1(x_1, \dots, x_n) &= x_1 + \cdots + x_n\,,\\
&\vdots\\
\sigma_r(x_1, \dots, x_n) &= \textstyle\sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}\,,\\
&\vdots\\
\sigma_n(x_1, \dots, x_n) &= x_1 \cdots x_n\,.
\end{aligned}$$

In dieser Aufgabe wollen wir den *Fundamentalsatz über symmetrische Polynome* beweisen: Zu jedem symmetrischen Polynom $f \in \mathcal{P}$ existiert ein eindeutig bestimmtes Polynom $g \in \mathcal{P}$, so dass

$$f(x_1, \dots, x_n) = g\bigl(\sigma_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \sigma_n(x_1, \dots, x_n)\bigr)\,. \tag{1}$$

Dazu sei $f \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ ein beliebiges symmetrisches Polynom und $\prec$ die lexikographische Ordnung. Weiter sei $\operatorname{lt} f = \mathbf{x}^\mu$ der zugehörige Leitterm.

(i) Zeigen Sie, daß gilt $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n$.

(ii) Zeigen Sie, daß das Polynom $h = \sigma_1^{\mu_1-\mu_2} \sigma_2^{\mu_2-\mu_3} \cdots \sigma_{n-1}^{\mu_{n-1}-\mu_n} \sigma_n^{\mu_n}$ denselben Leitterm wie $f$ besitzt. Folgern Sie mithilfe der Wohlordnungseigenschaft die Existenz eines Polynoms $g$, das (1) erfüllt.

(iii) Sei $\hat{g}$ ein weiteres Polynom, das (1) erfüllt. Dann gilt für $\Delta = g - \hat{g}$, daß $\Delta(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0$. Fassen Sie $\Delta(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ als eine Linearkombination von „Termen“ $T_\nu = \sigma_1^{\nu_1} \cdots \sigma_n^{\nu_n}$ auf. Zeigen Sie, daß für $\mu \neq \nu$ die Polynome $T_\mu$ und $T_\nu$ unterschiedliche Leitterme besitzen. Folgern Sie daraus die Eindeutigkeit von $g$ in (1).

(iv) Entwickeln Sie aus diesem Beweis einen Algorithmus zur Berechnung von $g$ für ein gegebenes symmetrisches Polynom $f$ und wenden Sie ihn auf das Polynom $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$ an.