Prof. Werner M. Seiler, Ph.D.
FB 10 Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

UNI KASSEL VERSITÄT

6. November 2013

Gröbner-Basen

3. Übungsblatt

Aufgabe 1

Seien $\mathcal{I}, \mathcal{J} \trianglelefteq \mathcal{P}$ zwei monomiale Ideale, die durch monomiale Erzeugendensysteme gegeben sind.

(i) Zeigen Sie, daß $\mathcal{I} + \mathcal{J}$ wieder ein monomiales Ideal ist, und schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `MonomialSum`, die ein monomiales Erzeugendensystem von $\mathcal{I} + \mathcal{J}$ berechnet.

(ii) Zeigen Sie, daß $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J}$ wieder ein monomiales Ideal ist, und schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `MonomialProd`, die ein monomiales Erzeugendensystem von $\mathcal{I} \cdot \mathcal{J}$ berechnet.

(iii) Schreiben Sie eine CoCoA-Funktion `IsMonomial`, die für ein beliebiges Ideal (gegeben durch ein Erzeugendensystem) überprüft, ob es monomial ist.

Für die Implementierungen sind die CoCoA-Funktionen `IsIn`, `Supp`, `Gens` und `Concat` nützlich.

Aufgabe 2

(i) Sei $\mathbb{k}$ ein beliebiger Körper und $\mathcal{P} = \mathbb{k}[x]$ ein univariater Polynomring. Zeigen Sie, daß für beliebige Polynome $f_1, f_2, \ldots, f_r \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ gilt

$$\langle f_1, f_2, \ldots, f_r \rangle = \big\langle \operatorname{ggT}(f_1, f_2, \ldots, f_r) \big\rangle .$$

(ii) Seien $f_1, f_2 \in \mathbb{k}[x_1, \ldots, x_n] \setminus \{0\}$ zwei multivariate Polynome mit $\operatorname{lc}(f_1) = \operatorname{lc}(f_2) = 1$ und $\operatorname{ggT}\big(\operatorname{lt}(f_1), \operatorname{lt}(f_2)\big) = 1$ (d.h. zwei normierte Polynome mit teilerfremden Leittermen). Zeigen Sie, daß für das Polynom $g = \operatorname{lt}(f_2) \cdot f_1 - \operatorname{lt}(f_1) \cdot f_2$ gilt:

$$g \longrightarrow^{+}_{\{f_1, f_2\}} 0 .$$