Prof. Werner M. Seiler, Ph.D.
FB 10 Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

UNIKASSEL VERSITÄT

27. November 2013

Gröbner-Basen

6. Übungsblatt

Aufgabe 1

(i) Sei $\prec$ eine Termordnung auf $\mathcal{P}$, die für alle $1 \leq \ell \leq n$ die Eliminationseigenschaft für die Variablen $x_1, \dots, x_\ell$ besitzt. Zeigen Sie, daß dann $\prec$ die lexicographische Termordnung $\prec_{\text{lex}}$ ist.

(ii) Sei $\prec_1$ eine Termordnung auf $\Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ und $\prec_2$ eine Termordnung auf $\Bbbk[y_1, \dots, y_m]$. Dann definieren wir die *Blocktermordnung* $\prec_{12}$ auf $\Bbbk[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$ wie folgt:

$$x^\mu y^\kappa \prec_{12} x^\nu y^\lambda \iff (x^\mu \prec_1 x^\nu) \vee (x^\mu = x^\nu \wedge y^\kappa \prec_2 y^\lambda), \qquad (\mu, \nu \in \mathbb{N}_0^n, \lambda, \kappa \in \mathbb{N}_0^m)\,.$$

Zeigen Sie, daß $\prec_{12}$ die Eliminationseigenschaft für $x_1, \dots, x_n$ besitzt.

Aufgabe 2

Seien $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_m \trianglelefteq \mathcal{P}$ Ideale. Wir definieren das Ideal $\mathcal{J} \trianglelefteq \Bbbk[t_1, \dots, t_m, x_1, \dots, x_n]$ durch

$$\mathcal{J} = \langle 1 - (t_1 + \dots + t_m), t_1\mathcal{I}_1, \dots, t_m\mathcal{I}_m \rangle\,.$$

(i) Zeigen Sie, daß $\mathcal{I}_1 \cap \dots \cap \mathcal{I}_m = \mathcal{J} \cap \mathcal{P}$.

(ii) Berechnen Sie das Ideal $\langle x, y \rangle \cap \langle x-1, y \rangle \cap \langle x-2, y-1 \rangle \trianglelefteq \mathbb{Q}[x, y]$.