Prof. Werner M. Seiler, Ph.D.
FB 10 Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

UNIKASSEL VERSITÄT

4. Dezember 2013

Gröbner-Basen

7. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $f \in \mathcal{P} = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ (mit $\mathrm{char}(K) = 0$) ein Polynom und $f = p_1^{\mu_1} \cdots p_m^{\mu_m}$ eine Zerlegung in paarweise verschiedene, irreduzible und nicht konstante Faktoren. Weiter sei $f^* = p_1 \cdots p_m$ der quadratfreie Anteil von f.

(i) Zeigen Sie, daß $\sqrt{\langle f \rangle} = \langle f^* \rangle$.

(ii) Zeigen Sie, daß $f^* = \dfrac{f}{\mathrm{ggT}\left(f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)}$.

(iii) Berechnen Sie mit (i),(ii) und CoCoA das Radikalideal von $I = \langle f \rangle \trianglelefteq \mathbb{Q}[x, y]$ mit

$$f = -x^2y^2+x^3y^2+2x^4y^2-2x^5y^2-x^6y^2+x^7y^2-2xy^3+4x^2y^3-4x^4y^3+2x^5y^3-y^4+3xy^4-3x^2y^4+x^3y^4$$

Aufgabe 2

(i) Sei $\mathcal{I} = \langle f_1, \dots, f_\ell \rangle \trianglelefteq \mathcal{P}$ ein Ideal und $f \in \mathcal{P}$ ein Polynom. Weiter sei t eine zusätzliche Variable und $\mathcal{J} = \langle \mathcal{I}, 1 - tf \rangle \trianglelefteq \Bbbk[t, x_1, \dots, x_n]$. Es gelte $\mathcal{J} \cap \mathcal{P} = \langle g_1, \dots, g_t \rangle \trianglelefteq \mathcal{P}$ mit

$$g_i = r_{i0}(1 - tf) + \sum_{j=1}^{\ell} r_{ij} f_j\,, \qquad r_{ij} = \sum_{k=0}^{d_j} f_{ijk} t^k, f_{ijk} \in \mathcal{P}\,, \qquad i = 1, \dots, t$$

und $m = \max_j d_j$. Zeigen Sie, daß $\mathcal{I} : \langle f \rangle^\infty = \mathcal{I} : \langle f^m \rangle = \mathcal{J} \cap \mathcal{P}$.

(ii) Berechnen Sie mit (i) und CoCoA ein Erzeugendensystem von $\mathcal{I} : \langle f \rangle^\infty$ für

$$\mathcal{I} = \langle x + z, x^2y, x - z^2 \rangle \trianglelefteq \mathbb{Q}[x, y, z], \quad f = x^2 + 3xz\,.$$