Prof. Werner M. Seiler, Ph.D.
FB 10 Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

UNIKASSEL VERSITÄT

11. Dezember 2013

Gröbner-Basen

8. Übungsblatt

Aufgabe 1

Seien $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_m \trianglelefteq \mathcal{P}$ paarweise verschiedene Ideale und $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{P}$ gegebene Polynome. Wir wollen eine Methode entwickeln, um die Lösungsmenge von Systemen linearer Kongruenzen der Form

$$f \equiv f_k \mod \mathcal{I}_k, \quad 1 \leq k \leq m \qquad (*)$$

zu berechnen. Dazu führen wir wieder zusätzliche Variablen $t_1, \dots, t_m$ sowie das Ideal

$$\mathcal{J} = \langle 1 - (t_1 + \cdots + t_m), t_1\mathcal{I}_1, \dots, t_m\mathcal{I}_m \rangle \trianglelefteq \tilde{\mathcal{P}} = \Bbbk[t_1, \dots, t_m, x_1, \dots, x_n]$$

ein. Es sei G eine Gröbner-Basis von $\mathcal{J}$ bezüglich einer Eliminationsordnung $\prec$ mit $x_i \prec t_j$ für alle $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$ und $g = \sum_{i=1}^m t_i f_i \in \tilde{\mathcal{P}}$. Beweisen Sie folgende Aussagen.

(i) Das System $(*)$ besitzt genau dann eine Lösung, wenn $\mathrm{NF}_G(g) \in \mathcal{P}$ gilt. (Mit $\mathrm{NF}_G(g)$ bezeichnen wir die *Normalform* von g bezüglich G, also den eindeutigen Rest bei der Division.)

(ii) Gilt $\mathrm{NF}_G(g) \in \mathcal{P}$, so ist die Lösungsmenge von $(*)$ gegeben durch $\mathrm{NF}_G(g) + \bigcap_{k=1}^m I_k$. Insbesondere ist $f \in \mathcal{P}$ genau dann eine Lösung, wenn gilt $\mathrm{NF}_G(g) = \mathrm{NF}_{G \cap \mathcal{P}}(f)$.

(iii) Berechnen Sie in $\mathbb{Q}[x, y]$ die Lösungsmenge von

$$\begin{array}{rcll} f & \equiv & x - 1 & \mod \langle x, y \rangle, \\ f & \equiv & x & \mod \langle x - 1, y \rangle, \\ f & \equiv & y & \mod \langle x - 2, y - 1 \rangle. \end{array}$$

Aufgabe 2

Es seien die Ideale $\mathcal{I} = \langle x_1x_2 - x_3 \rangle \trianglelefteq \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$ und $\mathcal{J} = \langle y_1y_2 + y_2 \rangle \trianglelefteq \mathbb{Q}[y_1, y_2]$ gegeben. Weiter definieren wir die Abbildung $\varphi : \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]/\mathcal{I} \to \mathbb{Q}[y_1, y_2]/\mathcal{J}$ durch

$$\varphi(x_1 + \mathcal{I}) = y_1^2 + y_2 + \mathcal{J}, \quad \varphi(x_2 + \mathcal{I}) = y_1 + y_2 + \mathcal{J}, \quad \varphi(x_3 + \mathcal{I}) = y_1^3 - y_1y_2^2 + \mathcal{J}.$$

(i) Zeigen Sie, dass φ wohldefiniert ist.

(ii) Berechnen Sie $\ker(\varphi)$.

(iii) Ist φ surjektiv?