Prof. Werner M. Seiler, Ph.D.
FB 10 Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

UNI KASSEL VERSITÄT

18. Dezember 2013

Gröbner-Basen

9. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $\mathcal{P} = \Bbbk[x_1, \dots, x_r]$ ein Polynomring versehen mit einer Termordnung $\prec_{\mathcal{P}}$. Mit $\mathbf{e}_i$ bezeichnen wir die Vektoren der Standardbasis des freien Moduls $\mathcal{P}^{2n}$, die hier als Zeilenvektoren betrachtet werden. Auf $\mathcal{P}^{2n}$ wählen wir die Termordnung

$$x^\mu \mathbf{e}_i \prec x^\nu \mathbf{e}_j \quad \Longleftrightarrow \quad (i > j) \vee \bigl(i = j \wedge x^\mu \prec_{\mathcal{P}} x^\nu\bigr)\,.$$

Für eine gegebene $(n \times n)$-Matrix M mit Einträgen $m_{ij} \in \mathcal{P}$ führen wir die Matrix $(M \mid \mathbb{1}_n)$ ein, wobei $\mathbb{1}_n$ die n-dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet. Sei nun $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\} \subset \mathcal{P}^{2n}$ eine reduzierte Gröbner-Basis des Untermoduls $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle \trianglelefteq \mathcal{P}^{2n}$, wobei der Vektor $\mathbf{v}_i$ die $i$te Zeile von $(M \mid \mathbb{1}_n)$ ist. Die Basis sei so geordnet, daß gilt $\operatorname{lt} \mathbf{w}_1 \succ \cdots \succ \operatorname{lt} \mathbf{w}_m$. Zeigen Sie, daß M genau dann invertierbar ist, wenn $n = m$ und $\operatorname{lt} \mathbf{w}_i = \mathbf{e}_i$ für $i = 1, \dots, n$ gilt. In diesem Fall sind außerdem die Vektoren $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ gerade die Zeilen der Matrix $(\mathbb{1} \mid M^{-1})$.

Aufgabe 2

Seien $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_t, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_s \in \mathcal{P}^\ell$ mit $\langle \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_t \rangle = \langle \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_s \rangle$. Zeigen Sie, daß freie $\mathcal{P}$-Moduln L, L' existieren mit

$$\operatorname{Syz}(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_t) \oplus L \cong \operatorname{Syz}(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_s) \oplus L'\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie den Syzygienmodul $\operatorname{Syz}(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_t, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_s)$ und zeigen Sie, daß er geschrieben werden kann als die direkte Summe eines Moduls isomorph zu $\operatorname{Syz}(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_t)$ und eines freien Moduls (und analog für $\operatorname{Syz}(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_s)$).