Prof. Werner M. Seiler, Ph.D.
FB 10 Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

UNIKASSEL VERSITÄT

15. Januar 2014

Gröbner-Basen

10. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_\ell \end{pmatrix}$ eine $(1 \times \ell)$-Matrix (also ein Zeilenvektor) mit Einträgen in $\mathcal{P} = \Bbbk[x_1, \dots, x_n]$ mit $1 \in \langle a_1, \dots, a_\ell \rangle \subseteq \mathcal{P}$.

(i) Zeigen Sie: $\ker A \oplus \mathcal{P} \cong \mathcal{P}^\ell$.
Hinweis: Wenn der Spaltenvektor $\mathbf{f} \in \mathcal{P}^\ell$ die Gleichung $A\mathbf{f} = 1$ erfüllt, dann gilt offensichtlich für alle Spaltenvektoren $\mathbf{g} \in \mathcal{P}^\ell$, daß $\mathbf{g} - (A\mathbf{g})\mathbf{f} \in \ker A$.

(ii) Der Spaltenvektor $\mathbf{f} \in \mathcal{P}^\ell$ erfülle die Gleichung $A\mathbf{f} = 1$.

a) Zeigen Sie, daß die Spalten der $(\ell \times \ell)$-Matrix $\mathbb{1} - \mathbf{f} \cdot A$ ein Erzeugendensystem des Moduls $\mathrm{Syz}(a_1, \dots, a_\ell) \subseteq \mathcal{P}^\ell$ bilden.

b) Zeigen Sie, daß eine Teilmenge des Erzeugendensystem aus Teil a) sogar eine Basis von $\mathrm{Syz}(a_1, \dots, a_\ell)$ bildet, falls ein Eintrag von f eine nicht verschwindende Konstante, d.h. aus $\Bbbk \setminus \{0\}$, ist.

c) Zeigen Sie: $\{\mathbf{g} \in \mathcal{P}^\ell \mid A\mathbf{g} = 1\} = \mathbf{f} + \mathrm{Syz}(a_1, \dots, a_\ell)$.

Aufgabe 2

Sei $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_s\} \subset \mathcal{P} \setminus \{0\}$ eine Menge nicht verschwindender Polynome und $\mathcal{B}$ ein homogenes[1] Erzeugendensystem von $\mathrm{Syz}\big(\mathrm{lt}\,(g_1), \dots, \mathrm{lt}\,(g_s)\big)$ (für irgendeine fest gewählte Termordnung $\prec$). Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $\mathcal{G}$ ist eine Gröbner-Basis des Ideals $\mathcal{I} = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$ für $\prec$.

(ii) Alle Syzygien $(h_1, \dots, h_s) \in \mathcal{B}$ können „geliftet“ werden, d.h. es gilt immer

$$h_1 g_1 + \ldots + h_s g_s \longrightarrow_{\mathcal{G}}^{+} 0\,.$$

Hinweis für die Rückrichtung: Zu jedem Idealelement $f \in \mathcal{I}$ existieren Polynome $f_1, \dots, f_s \in \mathcal{P}$, so daß $f = f_1 g_1 + \cdots + f_s g_s$. Für den Term $t = \max_i \mathrm{lt}\,(f_i g_i)$ gilt dann $\mathrm{lt}\,(f) \preceq t$. Nach dem Charakterisierungstheorem ist $\mathcal{G}$ genau dann eine Gröbner-Basis von $\mathcal{I}$, wenn jedes $f \in \mathcal{I}$ eine Standarddarstellung besitzt. Zeigen Sie daher folgende Aussage:

$$\mathrm{lt}\,(f) \prec t \quad\Longrightarrow\quad \exists \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_s \in \mathcal{P} \,:\, \tilde{f}_1 g_1 + \cdots + \tilde{f}_s g_s = f \;\wedge\; \tilde{t} = \max_i \mathrm{lt}\,(\tilde{f}_i g_i) \prec t\,.$$

[1] Seien $f_1, \dots, f_s \in \mathcal{P}$ homogene Polynome. Eine Syzygie $(h_1, \dots, h_s) \in \mathrm{Syz}(f_1, \dots, f_s)$ heißt *homogen vom Grad* d, wenn jede Komponente $h_i \in \mathcal{P}$ homogen ist und für jedes i gilt $\deg h_i + \deg f_i = d$.