Prof. Werner M. Seiler, Ph.D.
FB 10 Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

UNIKASSEL VERSITÄT

22. Januar 2014

Gröbner-Basen

11. Übungsblatt

Aufgabe 1

Seien $t_1, \dots, t_s \in \mathbb{T}^n$ Terme und $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s$ die Standardbasis des freien Moduls $\mathcal{P}^s$. Wir setzen

$$t_{i_1 \cdots i_n} = \mathrm{kgV}(t_{i_1}, \dots, t_{i_n}) \qquad \text{und} \qquad \tau_{ij} = \frac{t_{ij}}{t_i}\mathbf{e}_i - \frac{t_{ij}}{t_j}\mathbf{e}_j \in \mathrm{Syz}(t_1, \dots, t_s) \subseteq \mathcal{P}^s\,.$$

(i) Zeigen Sie: wenn t_l ein Teiler von t_{ij} ist, dann gilt $\tau_{ij} \in \langle \tau_{jl}, \tau_{li} \rangle_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{P}^s$. *Hinweis:* Leiten Sie zunächst die Gleichung $\frac{t_{ijl}}{t_{ij}}\tau_{ij} + \frac{t_{ijl}}{t_{jl}}\tau_{jl} + \frac{t_{ijl}}{t_{li}}\tau_{li} = 0$ her.

(ii) Folgern Sie aus (i) das 2. Buchberger-Kriterium (Satz II.2.9).

Aufgabe 2

Seien $f_1, \dots, f_s, g \in \mathcal{P}$ gegebene Polynome. Wir betrachten nun die *inhomogene* lineare Gleichung $h_1 f_1 + \dots + h_s f_s = g$ in den Unbestimmten $h_1, \dots, h_s$. Sei $\mathcal{S}$ die Menge der Lösungen, d.h.

$$\mathcal{S} = \bigl\{ (h_1, \dots, h_s) \in \mathcal{P}^s \mid h_1 f_1 + \dots + h_s f_s = g \bigr\}\,.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\mathcal{S}$ genau dann nicht leer ist, wenn $g \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle_{\mathcal{P}}$.

(ii) Sei jetzt die Lösungsmenge $\mathcal{S}$ nicht leer. Zeigen Sie, daß

$$\mathcal{S} = \mathbf{h} + \mathrm{Syz}(f_1, \dots, f_s) = \bigl\{ \mathbf{h} + \mathbf{s} \mid \mathbf{s} \in \mathrm{Syz}(f_1, \dots, f_s) \bigr\}$$

für jede beliebige spezielle Lösung $\mathbf{h}$ gilt. Überlegen Sie sich ein Verfahren zur Berechnung einer solchen Lösung $\mathbf{h}$.