Prof. Werner M. Seiler, Ph.D.
FB 10 Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

UNIKASSEL VERSITÄT

29. Januar 2014

Gröbner-Basen
12. Übungsblatt

Aufgabe 1

Wir betrachten dieselbe Situation wie in Abschnitt III.2 der Vorlesung: Die Menge $\mathcal{G} = \{g_1, \dots, g_r\}$ sei eine monische Gröbner-Basis für eine Termordnung $\prec$ und wir schreiben

$$t_i = \operatorname{lt} g_i\,, \qquad t_{ij} = \operatorname{kgV}(t_i, t_j)\,, \qquad \mathbf{T}_{ij} = \frac{t_{ij}}{t_i}\mathbf{e}_i - \frac{t_{ij}}{t_j}\mathbf{e}_j\,.$$

Ferner gelte wieder mit der Standarddarstellung $S(g_i, g_j) = \sum_{k=1}^{r} h_{ijk} g_k$, daß $\mathbf{S}_{ij} = \mathbf{T}_{ij} - \sum_{k=1}^{r} h_{ijk}\mathbf{e}_k$. Bekanntlich erzeugt die Menge $\mathcal{T} = \bigl\{\mathbf{T}_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq r\bigr\}$ den Syzygienmodul $\operatorname{Syz}\bigl(\operatorname{lt} g_1, \dots, \operatorname{lt} g_r\bigr)$. Wir nehmen an, daß die Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ immer noch ein Erzeugendensystem von $\operatorname{Syz}\bigl(\operatorname{lt} g_1, \dots, \operatorname{lt} g_r\bigr)$ ist. Beweisen Sie folgende Verallgemeinerung von Satz III.2.1: Die Menge $\{\mathbf{S}_{ij} \mid \mathbf{T}_{ij} \in \mathcal{B}\}$ erzeugt den Syzygienmodul $\operatorname{Syz}(\mathcal{G})$.

Aufgabe 2

(i) Geben Sie eine aus nicht negativen ganzen Zahlen bestehende Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems an:

$$\begin{aligned} 3\sigma_1 + 2\sigma_2 + \sigma_3 &= 10\,, \\ 4\sigma_1 + 3\sigma_2 + \sigma_3 &= 12\,. \end{aligned}$$

(ii) Machen Sie das Gleiche für folgendes System:

$$\begin{aligned} 2\sigma_1 + \sigma_2 - 3\sigma_3 + \sigma_4 &= 4\,, \\ -3\sigma_1 + 2\sigma_2 - 2\sigma_3 - \sigma_4 &= -3\,. \end{aligned}$$