

28. April 2016

Gröbner-Basen

2. Übungsblatt

Aufgabe 1

Ein Polynom $f \in \mathcal{P} = \mathbb{k}[x_1, \dots, x_n]$ heißt *symmetrisch*, wenn es unter beliebigen Permutationen der Variablen invariant bleibt:

$$f(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}) = f(x_1, \dots, x_n) \quad \forall \pi \in S_n.$$

Einfache Beispiele sind die n *elementarsymmetrischen Polynome* σ_i definiert durch:

$$\begin{aligned} \sigma_1(x_1, \dots, x_n) &= x_1 + \dots + x_n, \\ &\vdots \\ \sigma_r(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}, \\ &\vdots \\ \sigma_n(x_1, \dots, x_n) &= x_1 \dots x_n. \end{aligned}$$

In dieser Aufgabe wollen wir den *Fundamentalsatz über symmetrische Polynome* beweisen: Zu jedem symmetrischen Polynom $f \in \mathcal{P}$ existiert ein eindeutig bestimmtes Polynom $g \in \mathcal{P}$, so dass

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(\sigma_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \sigma_n(x_1, \dots, x_n)). \quad (1)$$

Dazu sei $f \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$ ein beliebiges symmetrisches Polynom und \prec die lexikographische Ordnung. Weiter sei $\text{lt } f = \mathbf{x}^\mu$ der zugehörige Leitterm.

- (i) Zeigen Sie, daß gilt $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$.
- (ii) Zeigen Sie, daß das Polynom $h = \sigma_1^{\mu_1 - \mu_2} \sigma_2^{\mu_2 - \mu_3} \dots \sigma_{n-1}^{\mu_{n-1} - \mu_n} \sigma_n^{\mu_n}$ denselben Leitterm wie f besitzt. Folgern Sie mithilfe der Wohlordnungseigenschaft die Existenz eines Polynoms g , das (1) erfüllt.
- (iii) Sei \hat{g} ein weiteres Polynom, das (1) erfüllt. Dann gilt für $\Delta = g - \hat{g}$, daß $\Delta(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = 0$. Fassen Sie $\Delta(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ als eine Linearkombination von „Termen“ $T_\nu = \sigma_1^{\nu_1} \dots \sigma_n^{\nu_n}$ auf. Zeigen Sie, daß für $\mu \neq \nu$ die Polynome T_μ und T_ν unterschiedliche Leitern besitzen. Folgern Sie daraus die Eindeutigkeit von g in (1).
- (iv) Entwickeln Sie aus diesem Beweis einen Algorithmus zur Berechnung von g für ein gegebenes symmetrisches Polynom f und wenden Sie ihn auf das Polynom $f(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4$ an.