Prof. Werner M. Seiler, Ph.D.
Dr. Anen Lakhal

FB 10 Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

UNI KASSEL VERSITÄT

08. Juni 2016

Gröbner-Basen

8. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $F = \{f_1, \dots, f_r\} \subset \mathcal{P}$ und $f \in \mathcal{P}$ gegeben und sei $I = \langle F \rangle$. Wie kann man entscheiden, ob $[f]$ eine Einheit in $\mathcal{P}/I$ ist. Falls dies der Fall ist, berechne man die Inverse $[f]^{-1}$.

Aufgabe 2

Seien $\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_m \trianglelefteq \mathcal{P}$ paarweise verschiedene Ideale und $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{P}$ gegebene Polynome. Wir wollen eine Methode entwickeln, um die Lösungsmenge von Systemen linearer Kongruenzen der Form

$$f \equiv f_k \mod \mathcal{I}_k, \quad 1 \leq k \leq m \qquad (*)$$

zu berechnen. Dazu führen wir wieder zusätzliche Variablen $t_1, \dots, t_m$ sowie das Ideal

$$\mathcal{J} = \langle 1 - (t_1 + \cdots + t_m), t_1\mathcal{I}_1, \dots, t_m\mathcal{I}_m \rangle \trianglelefteq \tilde{\mathcal{P}} = \Bbbk[t_1, \dots, t_m, x_1, \dots, x_n]$$

ein. Es sei G eine Gröbner-Basis von $\mathcal{J}$ bezüglich einer Eliminationsordnung $\prec$ mit $x_i \prec t_j$ für alle $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq m$ und $g = \sum_{i=1}^{m} t_i f_i \in \tilde{\mathcal{P}}$. Beweisen Sie folgende Aussagen.

(i) Das System $(*)$ besitzt genau dann eine Lösung, wenn $\mathrm{NF}_G(g) \in \mathcal{P}$ gilt. (Mit $\mathrm{NF}_G(g)$ bezeichnen wir die *Normalform* von g bezüglich G, also den eindeutigen Rest bei der Division.)

(ii) Gilt $\mathrm{NF}_G(g) \in \mathcal{P}$, so ist die Lösungsmenge von $(*)$ gegeben durch $\mathrm{NF}_G(g) + \bigcap_{k=1}^{m} I_k$. Insbesondere ist $f \in \mathcal{P}$ genau dann eine Lösung, wenn gilt $\mathrm{NF}_G(g) = \mathrm{NF}_{G \cap \mathcal{P}}(f)$.

(iii) Berechnen Sie in $\mathbb{Q}[x, y]$ die Lösungsmenge von

$$\begin{aligned} f &\equiv x - 1 && \mod \langle x, y \rangle, \\ f &\equiv x && \mod \langle x - 1, y \rangle, \\ f &\equiv y && \mod \langle x - 2, y - 1 \rangle. \end{aligned}$$