Prof. Werner M. Seiler, Ph.D.
Dr. Anen Lakhal

FB 10 Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

UNI KASSEL VERSITÄT

22. Juni. 2016

Gröbner-Basen

10. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $R = \mathbb{K}[x, y, z]$ und $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ ein Erzeugendensystem eines Moduls $M \subset R^3$, wobei

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass $M = \ker A$, wobei A die (1×3)-Matrix $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$.

(b) Zeige, das die Menge $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ ein minimales Erzeugendensystem vom M ist.

(c) Zeige, dass die Menge $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ R-linear abhängig ist.

(d) Beachte, dass (a) und (b) ein Beispiel von einem Untermodul vom R^3 geben indem es ein minimales Erzeugendensystem gibt, das linear abhängig ist. Dieses Phänomen kann in einem Vektorraum nicht vorkommen.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die Schreyer-Ordnung (Beispiel 8, Abschnitt III-1) eine Termordnung ist.

Aufgabe 3

Sei $\mathcal{P} = \Bbbk[x_1, \dots, x_r]$ ein Polynomring versehen mit einer Termordnung $\prec_{\mathcal{P}}$. Mit $\mathbf{e}_i$ bezeichnen wir die Vektoren der Standardbasis des freien Moduls $\mathcal{P}^{2n}$, die hier als Zeilenvektoren betrachtet werden. Auf $\mathcal{P}^{2n}$ wählen wir die Termordnung

$$x^\mu \mathbf{e}_i \prec x^\nu \mathbf{e}_j \quad \Longleftrightarrow \quad (i > j) \vee \bigl(i = j \wedge x^\mu \prec_{\mathcal{P}} x^\nu\bigr).$$

Für eine gegebene $(n \times n)$-Matrix M mit Einträgen $m_{ij} \in \mathcal{P}$ führen wir die Matrix $(M \mid \mathbb{1}_n)$ ein, wobei $\mathbb{1}_n$ die n-dimensionale Einheitsmatrix bezeichnet. Sei nun $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\} \subset \mathcal{P}^{2n}$ eine reduzierte Gröbner-Basis des Untermoduls $\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \rangle \trianglelefteq \mathcal{P}^{2n}$, wobei der Vektor $\mathbf{v}_i$ die $i$te Zeile von $(M \mid \mathbb{1}_n)$ ist. Die Basis sei so geordnet, daß gilt $\operatorname{lt} \mathbf{w}_1 \succ \cdots \succ \operatorname{lt} \mathbf{w}_m$. Zeigen Sie, daß M genau dann invertierbar ist, wenn $n = m$ und $\operatorname{lt} \mathbf{w}_i = \mathbf{e}_i$ für $i = 1, \dots, n$ gilt. In diesem Fall sind außerdem die Vektoren $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ gerade die Zeilen der Matrix $(\mathbb{1} \mid M^{-1})$.