Seminar *Involutive Basen*

(Wintersemester 2012/13)

Das Seminar dreht sich um zwei thematische Schwerpunkte: *Pommaret-Basen* (als ein sehr wichtiger Spezialfall involutiver Basen) und *Hilbert-Funktionen.* Pommaret-Basen sind eine besondere Klasse von Gröbner-Basen, die sich durch zusätzliche kombinatorische Eigenschaften auszeichnen und deshalb besonders gut für „höhere“ Anwendungen in der Kommutativen Algebra und Algebraischen Geometrie eignen. Die Theorie der Hilbert-Funktionen stellt einen möglichen Zugang zu einem Dimensionsbegriff in der Algebraischen Geometrie dar, der ebenfalls eng mit kombinatorischen Ideen verknüpft ist.

Vortragsthemen

A) **Pommaret-Basen:** Einführung von Pommaret-Basen erst für monomiale, dann für allgemeine polynomiale Ideale; wesentliche Eigenschaften wie Eindeutigkeit der involutiven Standarddarstellung; Existenzproblem nur kurz anschneiden; keine Diskussion der Berechnung. *Literatur: [17, Sect. 3.3.1/5], [15, Sect. 2/5]*

B) **Kombinatorische Zerlegungen:** Einführung graduierter Ring und Modul; Definition von Stanley- und Rees-Zerlegung; komplementäre Zerlegung; Algorithmen zur Berechnung. *Literatur: [17, Sect. 5.1] [16, Sect. 3] [19] [9] [13]*

C) **Quasistabile Ideale und das Generische Leitideal:** Definition stabile und quasistabile monomial Ideale; generisches Leitideal („GIN“); verschiedene Charakterisierungen quasistabiler Ideale. *Literatur: [17, Sect. 5.3] [16, Sect. 4] [1, Sect. 3] [8, Sect. 2] [4, Sect. 15.9], [7, Chapt. 4] [5]*

D) **Numerische Funktionen:** Definition; numerische Funktionen vom polynomialen Typ; Beschreibung als Reihe; Binomialdarstellung ganzer Zahlen. *Literatur: [14] [11, Sect. 5.1.A, 5.2.A, 5.5.A]*

E) Hilbert-Funktionen I: Hilbert-Funktionen monomialer Ideale; Zusammenhang mit Dimension einer Varietät; Hilbert-Funktionen polynomialer Ideale mit Unterscheidung affiner und projektiver Fall. Zusammenhang mit Stanley-Zerlegungen. *Literatur: [3, Chapt. 9, §§1-3]*

F) Hilbert-Funktionen II: Hilbert-Funktionen affiner K-Algebren; Existenz Hilbert-Polynom; Berechnung über exakte Sequenzen. *Literatur: [6] [11, Sect. 5.1.B, 5.2.B] [2, Sect. 4.1]*

G) Dimension und Tiefe: Dimension und Pommaret-Basen; unabhängige Variablen; reguläre Folgen; Tiefe; Zusammenhang mit Pommaret-Basen; Kriterium für Cohen-Macaulay-Ringe; Kriterium für Gotzmann-Ringe. *Literatur: [17, Sect. 5.2] [16, Sect. 3] [18, Sect. 5] [10] [2]*

H) Die Sätze von Green, Macaulay und Gotzmann I & II: Lex-Segmente; Reduktionssatz von Green; Wachstumssatz von Macaulay; Persistenz- und Regularitätssatz von Gotzmann. *Literatur: [5] [12] [11, Sect. 5.5] [2, Sect. 4.2/3]*

Literatur

[1] I. Bermejo and P. Gimenez. Saturation and Castelnuovo-Mumford regularity. *J. Alg.*, 303:592–617, 2006.

[2] W. Bruns and J. Herzog. *Cohen-Macaulay Rings.* Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[3] D. Cox, J. Little, and D. O'Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1992.

[4] D. Eisenbud. *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics 150. Springer-Verlag, New York, 1995.

[5] M.L. Green. Generic initial ideals. In J. Elias, J.M. Giral, R.M. Miró-Roig, and S. Zarzuela, editors, *Six Lectures on Commutative Algebra*, Progress in Mathematics 166, pages 119–186. Birkhäuser, Basel, 1998.

[6] G.-M. Greuel and G. Pfister. *A* SINGULAR *Introduction to Commutative Algebra.* Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[7] J. Herzog and T. Hibi. *Monomial Ideals.* Graduate Texts in Mathematics 260. Springer-Verlag, London, 2011.

[8] J. Herzog, D. Popescu, and M. Vladoiu. On the Ext-modules of ideals of Borel type. In *Commutative Algebra*, Contemp. Math. 331, pages 171–186. Amer. Math. Soc., Providence, 2003.

[9] H. Hironaka. Idealistic exponents of singularity. In J.-I. Igusa, editor, *Algebraic Geometry – The Johns Hopkins Centennial Lectures*, pages 52–125. Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1977.

[10] H. Kredel and V. Weispfenning. Computing dimension and independent sets for polynomial ideals. *J. Symb. Comp.*, 6:231–247, 1988.

[11] M. Kreuzer and L. Robbiano. *Computational Commutative Algebra 2*. Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[12] I. Peeva. *Graded Syzygies*. Algebra and Applications 15. Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[13] D. Rees. A basis theorem for polynomial modules. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 52:12–16, 1956.

[14] L. Robbiano. Introduction to the theory of Hilbert functions. *Queen's Papers Pure Appl. Math.*, 85:B1–B26, 1990. Queen's Curves Seminar Vol. VII.

[15] W.M. Seiler. A combinatorial approach to involution and δ-regularity I: Involutive bases in polynomial algebras of solvable type. *Appl. Alg. Eng. Comm. Comp.*, 20:207–259, 2009.

[16] W.M. Seiler. A combinatorial approach to involution and δ-regularity II: Structure analysis of polynomial modules with Pommaret bases. *Appl. Alg. Eng. Comm. Comp.*, 20:261–338, 2009.

[17] W.M. Seiler. *Involution — The Formal Theory of Differential Equations and its Applications in Computer Algebra*. Algorithms and Computation in Mathematics 24. Springer-Verlag, Berlin, 2010.

[18] W.M. Seiler. Effective genericity, δ-regularity and strong Noether position. *Comm. Alg.*, 40:3933–3949, 2012.

[19] B. Sturmfels and N. White. Computing combinatorial decompositions of rings. *Combinatorica*, 11:275–293, 1991.