Prof. Werner M. Seiler, Ph.D.
FB 10 Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

UNIKASSEL VERSITÄT

19. April 2012

Kurven und Singularitäten

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

(i) Zeigen Sie, daß jeder k-dimensionale Untervektorraum $U \leq \mathbb{R}^n$ diffeomorph zu $\mathbb{R}^k$ ist und daß alle linearen Abbildungen $U \to U$ glatt sind.

(ii) Wir betrachten die Einheitskugel $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Der „Nordpol" ist der Punkt $N = (0,0,1) \in S^2$ und wir identifizieren $\mathbb{R}^2$ mit der xy-Ebene im $\mathbb{R}^3$. Die *stereographische Projektion* ist dann die Abbildung $\pi : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^2$, die jeden Punkt $P \in S^2 \setminus \{N\}$ abbildet auf den Schnittpunkt der Geraden durch P und N mit der xy-Ebene. Zeigen Sie, daß π ein Diffeomorphismus ist. Benutzen Sie dieses Ergebnis, um zu zeigen, daß S^2 eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 2

Eine glatte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird *flach* in $\hat{x} \in \mathbb{R}$ genannt, wenn alle Ableitungen von f in $\hat{x}$ verschwinden: $f^{(i)}(\hat{x}) = 0$ für alle $i > 0$. In dieser Aufgabe wollen wir uns mit einem wichtigen Beispiel für eine solche Funktion beschäftigen.

(i) Zeigen Sie, daß die Funktion f definiert durch $f(x) = e^{-1/x^2}$ für $x > 0$ und durch $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ glatt und flach in $\hat{x} = 0$ ist.

(ii) Zeigen Sie, daß die Funktion $g(x) = f(x-a)f(b-x)$ mit $a < b \in \mathbb{R}$ glatt, positiv auf (a,b) und die Nullfunktion auf $\mathbb{R} \setminus (a,b)$ ist.

(iii) Betrachten Sie nun die Funktion

$$h(x) = \Big(\int_{-\infty}^{x} g(t)dt\Big) / \Big(\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt\Big) .$$

Zeigen Sie, daß h eine glatte Funktionen mit folgenden Eigenschaften ist: $h(x) = 0$ für $x < a$, $h(x) = 1$ für $x > b$ und $0 < h(x) < 1$ für $x \in (a,b)$.

(iv) Es sei nun $0 < a < b$. Konstruieren Sie eine Funktion $k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften: $k(x) = 1$ für $|x| < a$, $k(x) = 0$ für $|x| > b$ und $0 < k(x) < 1$ für $|x| \in (a,b)$.