Prof. Werner M. Seiler, Ph.D.
FB 10 Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

UNI KASSEL VERSITÄT

26. April 2012

Kurven und Singularitäten

2. Übungsblatt

Aufgabe 1

(i) Sei $U \leq \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum. Zeigen Sie, daß für alle $x \in U$ gilt: $T_x U = U$.

(ii) Sei $U \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Untermannigfaltigkeit der Mannigfaltigkeit M und $\iota : U \to M$ die kanonische Inklusion. Zeigen Sie, daß für alle $x \in U$ gilt: $T_x U = \operatorname{im}(d\iota_x) \subseteq T_x M$.

(iii) Sei $P = (x, y, z) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ ein beliebiger Punkt auf der Einheitskugel. Geben Sie eine Basis des Tangentialraums $T_P S^2 < \mathbb{R}^3$ an.

Aufgabe 2

Der *Graph* einer Abbildung $f : M \subseteq \mathbb{R}^m \to N \subseteq \mathbb{R}^n$ ist bekanntlich die Menge

$$\Gamma_f = \big\{ \big(x, f(x)\big) \in M \times N \mid x \in M \big\} \subseteq \mathbb{R}^{m+n}\,.$$

Im Folgenden sei f stets glatt und M, N seien Mannigfaltigkeiten.

(i) Sei $F : M \to \Gamma_f$ definiert durch $F(x) = \big(x, f(x)\big)$. Zeigen Sie, daß F ein Diffeomorphismus ist. Folgern Sie daraus, daß Γ_f eine Mannigfaltigkeit mit derselben Dimension wie M ist.

(ii) Zeigen Sie, daß für die Tangentialabbildung $dF_x : T_x M \to T_{(x,f(x))}\Gamma_f$ gilt: $dF_x(v) = \big(v, df_x(v)\big)$.

(iii) Zeigen Sie, daß der Tangentialraum an den Graphen Γ_f von f in dem Punkt $\big(x, f(x)\big)$ der Graph der Tangentialabbildung $df_x : T_x M \to T_{f(x)} N$ ist: $T_{(x,f(x))}\Gamma_f = \Gamma_{df_x}$