Prof. Werner M. Seiler, Ph.D.
FB 10 Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

UNI KASSEL VERSITÄT

2. Mai 2012

Kurven und Singularitäten

3. Übungsblatt

Aufgabe 1

Sei $0 \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Umgebung des Ursprungs und $f : U \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(i) Sei $f(0,0) = 0$. Dann existieren auf einer offenen Umgebung $0 \in V \subseteq U$ zwei glatte Funktionen $g, h : V \to \mathbb{R}$, so daß $f(x,y) = xg(x,y) + yh(x,y)$.

(ii) Es gelte $f(x,0) \equiv 0$ für alle x hinreichend nahe bei 0. Dann kann $g(x,y) \equiv 0$ gewählt werden.

Aufgabe 2

Wir betrachten die Kurve $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $\gamma(t) = \bigl(t, c_2t^2 + c_3t^3 + c_4t^4 + c_5t^5\bigr) = \bigl(t, g(t)\bigr)$ mit Konstanten $c_i \in \mathbb{R}$ sowie die „Entfernungsfunktion“ $f(t) = (a-t)^2 + (b-g(t))^2$, die das Quadrat des Abstands zwischen dem festen Punkt $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ und dem Kurvenpunkt $\gamma(t)$ bestimmt. Geben Sie für jedes $k \geq 0$ die Bedingungen an die Parameter $a, b, c_2, \dots, c_5$ an, so daß f im Nullpunkt eine A_k-Singularität besitzt. Zeigen Sie insbesondere, daß $k > 5$ nicht möglich ist.