Prof. Werner M. Seiler, Ph.D.
FB 10 Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

UNI KASSEL
VERSITÄT

9. Mai 2012

Kurven und Singularitäten

4. Übungsblatt

Aufgabe 1

(i) Sei $f : M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, daß die Funktion $\operatorname{rk} f : M \to \mathbb{R},\ x \mapsto \operatorname{rk}(df_x)$ *von unten halbstetig* ist. Dies bedeutet, daß es zu jedem Punkt $x \in M$ eine offene Umgebung $x \in U \subseteq M$ gibt, so daß für alle Punkte $y \in U$ gilt $\operatorname{rk} f(y) \geq \operatorname{rk} f(x)$.

(ii) Sei $A : M \to \mathbb{R}^{m\times n}$ eine glatte matrixwertige Funktion auf einer Mannigfaltigkeit M. Ein Punkt $x \in M$ wird als *rangregulär* bezeichnet, wenn es eine offene Umgebung $x \in U \subseteq M$ gibt, so daß $\operatorname{rk} A(y) = \operatorname{rk} A(x)$ für alle Punkte $y \in U$. Zeigen Sie, daß die Menge M_{rk} aller rangregulärer Punkte in M offen und dicht ist.

Aufgabe 2

Eine glatte Abbildung $f : M \to N$ zwischen zwei Mannigfaltigkeiten ist eine *Subimmersion* vom Rang r in $x \in M$, wenn es eine Umgebung $x \in U \subseteq M$ gibt, so daß für alle $y \in U$ gilt $\operatorname{rk}(df_y) = r$.

(i) Zeigen Sie, daß jede Immersion und jede Submersion eine Subimmersion ist.

(ii) Sei $f : M \subseteq \mathbb{R}^m \to N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Subimmersion in x. Zeigen Sie, daß in geeigneten lokalen Koordinaten um x bzw. $f(x)$ die Abbildung f die Form $f(x_1, \dots, x_m) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0)$ annimmt.

(iii) Folgern Sie aus (ii), daß jede Subimmersion lokal als die Verkettung einer Submersion mit einer Immersion geschrieben werden kann.