Prof. Werner M. Seiler, Ph.D.
FB 10 Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

UNIKASSEL VERSITÄT

6. Juni 2012

Kurven und Singularitäten

7. Übungsblatt

Aufgabe 1

In dieser Aufgabe wollen wir uns intensiver mit dem vor allem aus der Optik bekannten Phänomen einer Kaustik beschäftigen. Dazu sei im Folgenden $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ der Ortsvektor eines fest gewählten Punktes P und $\vec{\gamma} : I \to \mathbb{R}^2$ eine ebene Kurve, die *nicht* durch den Punkt P geht.

(i) Wir betrachten die Funktion $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $F(t, \vec{x}) = \big\|\vec{\gamma}(t) - \vec{x}\big\| - \big\|\vec{\gamma}(t) - \vec{v}\big\|$ wobei $\| \cdot \|$ die übliche Euklidische Norm im $\mathbb{R}^2$ bezeichne. Zeigen Sie, daß 0 für alle Funktion F_t ein regulärer Wert ist. Wie sehen die Kurven $C_t = F_t^{-1}(0)$ aus?

(ii) Die *orthotome Kurve* $\vec{\delta} : I \to \mathbb{R}^2$ zu $\vec{\gamma}$ ist geometrisch wie folgt definiert: man erhält $\vec{\delta}(t)$, indem man den Punkt P an der Tangente durch den Punkt $\vec{\gamma}(t)$ spiegelt. Zeigen Sie, daß die orthotome Kurve die Einhüllende der Kurvenschar F ist.

(iii) Wir legen nun eine Lichtquelle in den Punkt P und stellen uns vor, daß die Kurve $\vec{\gamma}$ verspiegelt sei. Bekanntlich gilt bei der Reflektion von Licht, daß der Einfallswinkel (zum Normalenvektor) gleich dem Ausfallswinkel ist. Zeigen Sie, daß der ausfallende Strahl stets auf der Geraden durch $\vec{\gamma}(t)$ und $\vec{\delta}(t)$ liegt.

(iv) Wir betrachten nun die Schar der reflektierten Lichtstrahlen. Ihre Einhüllende heißt *(reflektierende) Kaustik* oder *Katakaustik*; an Punkten auf dieser Kurve ist die Lichtintensität besonders hoch. Zeigen Sie, daß die Katakaustik die Evolute der orthotomen Kurve $\vec{\delta}$ ist.