Prof. Werner M. Seiler, Ph.D.
FB 10 Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

UNI KASSEL VERSITÄT

13. Juni 2012

Kurven und Singularitäten

8. Übungsblatt

Im Folgenden erfülle die Funktion $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ stets die in der Vorlesung gemachten Annahmen.

Aufgabe 1

Es sei $r = 2$ und $\mathcal{D}$ die Einhüllende der durch F definierten Kurvenschar. Für den Parameterwert t_0 berühre die Kurve C_{t_0} die Einhüllende $\mathcal{D}$ in dem Punkt P_0. Zeigen Sie, daß C_{t_0} und $\mathcal{D}$ sich in P_0 *nicht* kreuzen können, wenn P_0 ein regulärer Punkt ist.

Hinweise: Als motivierende Beispiele können Sie die folgenden Kurvenscharen betrachten: $F(t, x, y) = 2t^3 + t(1 - 2y) - x$ (Normalenschar zur Parabel $y = x^2$) bzw. $F(t, x, y) = y - (x - t^3)$. Nehmen Sie zur Vereinfachung o.B.d.A. an, daß P_0 der Ursprung und $t_0 = 0$ ist und daß die Kurve C_0 im Ursprung eine waagrechte Tangente besitzt.

Aufgabe 2

Sei nun $r \geq 3$. Ein Punkt $(t_0, \vec{x}_0) \in \Sigma$ auf der Kriminante heißt *Regressionspunkt*, wenn dort gilt $\partial^2 F/\partial t^2(t_0, \vec{x}_0) = 0$. Wir bezeichnen im Folgenden mit $\mathcal{R} \subseteq \Sigma$ die Menge aller Regressionspunkte und mit $\mathcal{D}_{t_0} = \mathcal{D} \cap C_{t_0} \subseteq \mathbb{R}^r$ den Schnitt der Diskriminante mit der Mannigfaltigkeit $C_{t_0} = F_{t_0}^{-1}(0)$. In dem Regressionspunkt $P = (t_0, \vec{x}_0) \in \mathcal{R}$ gelte $\partial^3 F/\partial t^3(t_0, \vec{x}_0) \neq 0$ und die Jacobi-Matrix der Abbildung $G = (F, \partial F/\partial t)$ habe in P vollen Rang.

(i) Zeigen Sie, daß der Regressionspunkt P eine Umgebung $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r$ besitzt, so daß $\mathcal{R} \cap U$ eine $(r-2)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

(ii) Zeigen Sie, daß $\mathcal{D}_{t_0}$ in einer Umgebung des Punktes $\vec{x}_0 = \pi(P)$ ebenfalls eine $(r-2)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

(iii) Zeigen Sie, daß die Projektion $\pi(\mathcal{R} \cap U)$ immer noch eine $(r-2)$-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, deren Tangentialraum in $\vec{x}_0$ mit $T_{\vec{x}_0}\mathcal{D}_{t_0}$ zusammenfällt.