

## Übungen zur Linearen Algebra I – Blatt10

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)

e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de

---

Abgabe: Bis Mittwoch (14:00) in den jeweiligen Briefkästen im Mathematischen Institut.

**1. Aufgabe:** (4 Punkte) Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem (LGS) über dem Körper  $K$ , wobei  $K = \mathbb{Q}, \mathbb{F}_3, \mathbb{F}_5$ :

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\2x_1 + 2x_2 + x_4 &= 2 \\x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 1 \\x_1 + x_3 + 2x_4 &= 1\end{aligned}$$

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge.

**2. Aufgabe:** (4 Punkte) Gegeben sei das folgende LGS über  $\mathbb{R}$ , welches von den Parametern  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  abhängt:

$$\begin{aligned}(\alpha^2 + \alpha - 1)x_1 - x_2 - \beta x_3 + (\alpha^2\beta + \alpha\beta)x_4 &= -1 \\2x_1 + x_2 + \beta x_3 + x_4 &= \alpha + 4 \\(\alpha^2 + \alpha - 2)x_1 - x_2 - \beta x_3 + (\alpha^2\beta + \alpha\beta - 1)x_4 &= -3 \\2x_1 + x_2 + x_4 &= 5\end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle Paare  $(\alpha, \beta)$  für die das LGS lösbar ist, und geben Sie jeweils die Lösungsmenge an.

**3. Aufgabe:** (4 Punkte) Formulieren Sie einen Algorithmus, mit dem Sie durch elementare Zeilenumformungen ein LGS auf die *reduzierte Treppenform* bringen können, d.h., auf eine Treppenform, so daß die Pivot-Elemente jeweils gleich 1 sind und so daß über den Pivot-Elementen nur Einträge = 0 stehen. Lösen sie damit das lineare Gleichungssystem

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \quad 9x_1 + 3x_2 + x_3 = 3.$$

(Bonusaufgabe: (2 Punkte) Zeigen Sie die Eindeutigkeit der reduzierten Treppenform.)

**4. Aufgabe:** (4 Punkte) Zeigen Sie, daß die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

regulär ist, und berechnen Sie  $A^{-1}$ .