Übungen zur Linearen Algebra I – Blatt11

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)
e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de

Abgabe: Bis Mittwoch (14:00) in den jeweiligen Briefkästen im Mathematischen Institut.

1. Aufgabe: (4 Punkte) Im $\mathbb{R}^5$ seien die Untervektorräume

$$U = \langle (2,3,2,1,1)^{\mathrm{T}},\ (2,0,1,3,1)^{\mathrm{T}},\ (3,1,2,4,2)^{\mathrm{T}} \rangle$$

und

$$V = \langle (1,0,1,2,0)^{\mathrm{T}},\ (1,3,2,0,0,)^{\mathrm{T}},\ (0,-2,-1,1,1)^{\mathrm{T}} \rangle$$

gegeben. Bestimmen Sie

(a) je eine Basis von $U+V$ und $U \cap V$,

(b) Unterräume W_1, W_2 von $\mathbb{R}^5$ mit $W_1 \oplus U = W_2 \oplus V = U + V$,

(c) je eine Basis von $(U+V)/U$ und von $(U+V)/V$.

2. Aufgabe: (4 Punkte) Im $\mathbb{R}^4$ seien in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ ein Unterraum U_a sowie zwei Vektoren x und y gegeben:

$$U_a = \langle (1,a,0,2)^{\mathrm{T}},\ (1-a, 2-a^2, 1, -a)^{\mathrm{T}},\ (3,0,-a,1)^{\mathrm{T}} \rangle$$

$$x = (0,2,1,1)^{\mathrm{T}},\ y = (1,-2,0,-1)^{\mathrm{T}}.$$

Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$, für die die Äquivalenzklassen $x + U_a,\ y + U_a \in \mathbb{R}^4/U_a$ gleich, bzw. linear unabhängig, sind.

3. Aufgabe: (4 Punkte) Benutzen Sie den Gauß-Algorithmus um die Determinante der folgenden Matrizen zu berechnen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

4. Aufgabe: (4 Punkte) Zeigen Sie, daß für jedes $\sigma \in S_n$ gilt

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=i+1}^{n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$