Übungen zur Linearen Algebra I – Blatt12

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)
e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de

Abgabe: Bis Mittwoch (14:00) in den jeweiligen Briefkästen im Mathematischen Institut.

1. Aufgabe: (4 Punkte) Gegeben sei die folgende Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie, ob M diagonalisierbar ist und bestimmen Sie im positiven Fall das Spektrum von M sowie eine Basis X aus Eigenvektoren. Berechnen sie ferner die Darstellungsmatrix $A_{\phi,X,X}$ der linearen Abbildung $\phi : K^n \to K^n$, $y \mapsto My$. (Hinweis: Der Absolutbetrag der Eigenwerte ist ≤ 6.)

2. Aufgabe: (2 Punkte) Es sei $K[x]_n \subseteq K[x]$ der K-Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$ und

$$\phi : K[x]_n \to K[x]_n,\ p(x) \mapsto \frac{d}{dx}(p(x)).$$

Überprüfen Sie, ob die lineare Abbildung ϕ diagonalisierbar ist.

3. Aufgabe: (4 Punkte) (Vandermondesche Determinante) Es seien $c_1, \ldots, c_n \in K$. Man beweise

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1^{n-1} & c_2^{n-1} & \cdots & c_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=i+1}^{n} (c_j - c_i).$$

4. Aufgabe: (6 Punkte) Es seien $A, B \in K^{n\times n}$ zwei diagonalisierbare Matrizen. Diese heißen *simultan diagonalisierbar*, falls eine Basis $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ von K^n existiert, so daß die Elemente x_i, $i = 1, \ldots, n$, jeweils Eigenvektoren von A und von B sind. Zeigen Sie, daß die Matrizen A und B genau dann simultan diagonalisierbar sind, wenn $AB = BA$ gilt (d.h., A und B *kommutieren*).