Übungen zur Linearen Algebra I – Blatt2

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)
e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de

Abgabe: Bis Mittwoch, den 10.5., 14:00 Uhr, in den jeweiligen Briefkästen im Mathematischen Institut.

1. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei K ein Körper.

(a) Zeigen Sie, daß es genau einen Gruppenhomomorphismus $\phi : (\mathbb{Z}, +) \to (K, +)$ gibt mit der Eigenschaft, daß $n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ auf $n \cdot 1 := 1 + \cdots + 1 \in K$ (die $1 \in K$ wird n-mal addiert) abgebildet wird. Zeigen Sie ferner, daß für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ die Gleichung $\phi(ab) = \phi(a) \cdot \phi(b)$ gilt.

(b) Die *Charakteristik* von K ist per Definition gleich 0, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ $n \cdot 1 \neq 0 \in K$ gilt. Ansonsten ist die *Charakteristik* von K definiert als die kleinste natürliche Zahl n, für welche $n \cdot 1 = 0 \in K$ gilt. Man zeige, daß die Charakteristik eines Körpers gleich 0 oder gleich einer Primzahl ist.

2. Aufgabe: (2 Punkte) Zeigen Sie, daß das Produkt (d.h. die Verknüpfung) von Abbildungen assoziativ ist. D.h., wenn

$$f_i : M_i \to N_i,\ i = 1, 2, 3,$$

Abbildungen von Mengen mit $N_i = M_{i+1}$ (für $i = 1, 2$) sind, dann gilt

$$(f_3 \circ f_2) \circ f_1 = f_3 \circ (f_2 \circ f_1).$$

3. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei $n \in \mathbb{N}$ und S_n die Menge der bijektiven Abbildungen der Menge $\{1, \ldots, n\}$ in sich selbst. Folgern Sie mit Aufgabe 2, dass die Menge S_n mit dem durch die Verknüpfung von Abbildungen gegebenen Produkt eine Gruppe ist (diese wird als *symmetrische Gruppe auf* n *Buchstaben* bezeichnet). Berechnen Sie die Anzahl der Elemente von S_n.

4. Aufgabe: (6 Punkte) Zeigen Sie, daß es einen surjektiven Homomorphismus ϕ der Gruppe S_3 auf die Gruppe $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ gibt und berechnen Sie die Quotientenmenge $S_3/\ker\phi$.