**Übungen zur Linearen Algebra I – Blatt3**

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)
e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de

---

Abgabe: Bis Mittwoch, den 17.5., 14:00 Uhr, in den jeweiligen Briefkästen im Mathematischen Institut.

**1. Aufgabe:** (4 Punkte) Es sei $K$ ein Körper und $K[x]$ der Polynomring über $K$. Für $f \in K[x]$ sei $\deg(f)$ der Grad von $f$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $f, g \in K[x]$ gilt:

$$\deg(f+g) \leq \max(\deg(f), \deg(g))$$

sowie

$$\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g).$$

Wann steht in der oberen Ungleichung ein Gleichheitszeichen?

(b) Der Ring $K[x]$ ist nullteilerfrei.

**2. Aufgabe:** (4 Punkte) Es sei $G$ eine Gruppe. Eine Untergruppe $N$ von $G$ heißt *Normalteiler* von $G$, falls für alle $g \in G$ die folgende Gleichheit von Mengen gilt:

$$gNg^{-1} := \{gng^{-1} \mid n \in N\} = N.$$

(a) Sei $N$ Normalteiler von $G$. Für $g \in G$ sei $gN := \{gn \mid n \in N\}$ ($gN$ heißt Nebenklasse von $N$). Definieren Sie auf der Menge

$$G/N := \{gN \mid g \in G\}$$

eine Gruppenstruktur, und zeigen Sie, daß es einen surjektiven Homomorphismus $\phi : G \to G/N$ gibt.

(b) Zeigen Sie, daß eine Untergruppe $N$ von $G$ genau dann ein Normalteiler ist, wenn $N$ der Kern eines Gruppenhomomorphismus $\phi : G \to H$ ist.

**3. Aufgabe:** (6 Punkte) Es seien $(R, +, \cdot)$ und $(R', +, \cdot)$ kommutative Ringe. Ein Gruppenhomomorphismus $\phi : (R, +) \to (R', +)$ heißt *Ringhomomorphismus*, wenn für alle $a, b \in R$ die Gleichung $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$ gilt. Eine Untergruppe $I$ von $(R, +)$ heißt *Ideal* von $R$, wenn für alle $r \in R$ und für alle $i \in I$ das Element $r \cdot i$ wieder in $I$ liegt.

(a) Zeigen Sie, daß die Multiplikation von $R$ auf der (additiven) Gruppe $R/I$ eine Ringstruktur induziert und daß es einen surjektiven Ringhomomorphismus $\phi : R \to R/I$ gibt.

(b) Zeigen Sie, daß eine Untergruppe $I$ von $(R, +)$ genau dann ein Ideal ist, wenn $I$ der Kern eines Ringhomomorphismus $\phi : R \to S$ ist.

**4. Aufgabe:** (2 Punkte) In der Zentralübung wurde gezeigt, daß es für $a, b \in \mathbb{Z}$ Elemente $x, y \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$ax + by = \mathrm{ggT}(a, b). \tag{1}$$

Sei $p$ eine Primzahl und $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Geben Sie mit der Gleichung (1) eine Methode an, um zu gegebenem $a \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ das Inverse $\frac{1}{a} \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ zu berechnen.