Übungen zur Linearen Algebra I – Blatt4

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)
e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de

Abgabe: Bis Mittwoch in den jeweiligen Briefkästen im Mathematischen Institut.

1. Aufgabe: (2 Punkte) Es seien K ein Körper und $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in K[x]$ ein Polynom. Dieses kann man über die Regel

$$p(x)' = \sum_{i=1}^{n} i a_i x^{i-1}$$

ableiten. Zeigen Sie, daß $p(x)$ genau dann eine mehrfache Nullstelle besitzt, wenn $p(x)$ und $p(x)'$ eine gemeinsame Nullstelle besitzen.

2. Aufgabe: (6 Punkte) Wenn A, B zwei Mengen sind, dann setzt man

$$A^B := \{\text{Funktionen von } B \text{ nach } A\} = \mathrm{Abb}(B, A).$$

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bzw. von $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$? (Begründung!)

(a) $\{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists c > 0 : \forall i \in \mathbb{N} : |a_i| < c\}$,

(b) $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(1) = c\},\ c \in \mathbb{R}$ fest,

(c) $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \ \text{ injektiv}\}$,

(d) $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \ \text{ hat mindestens eine Nullstelle}\}$,

(e) $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(x) = 0 \ \text{ bis auf endlich viele } \ x \in \mathbb{R}\}$.

3. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_{n-1} \in V$. Weiter seien $v_n \in U := \langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle$ und $\eta \in V \setminus U$. Zeigen Sie: Die Vektoren $v_1 + \eta, \ldots, v_n + \eta$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Vektoren $v_1 - v_n, \ldots, v_{n-1} - v_n$ linear unabhängig sind.

4. Aufgabe: (4 Punkte) Im Vektorraum K^4 (für $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$) seien die Vektoren

$$v_1 = (0, 1, 1, 2), v_2 = (1, 0, 2, 2), v_3 = (2, 2, 0, 2)$$

gegeben. Geben Sie eine Basis von $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ an und ergänzen Sie diese zu einer Basis von K^4.