Übungen zur Linearen Algebra I – Blatt5

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)
e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de

Abgabe: Bis Mittwoch (14:00) in den jeweiligen Briefkästen im Mathematischen Institut.

1. Aufgabe: (4 Punkte) Es seien V ein endlich erzeugter Vektorraum über einem Körper K und $B \subseteq V$. Zeigen Sie, daß B genau dann eine Basis von V ist, wenn

$$V = \bigoplus_{b \in B} \langle b \rangle_K.$$

2. Aufgabe: (4 Punkte) Es seien V ein endlich erzeugter Vektorraum über einem Körper K und U ein Unterraum von V. Ein weiterer Unterraum W von V heißt *Komplement* von U, falls gilt:

$$U + W = U \oplus W = V.$$

Man zeige, daß jeder Unterraum von V ein Komplement besitzt. Ist dieses Komplement eindeutig?

3. Aufgabe: (4 Punkte) Es seien V ein K-Vektorraum und A_1, A_2 Teilmengen von V. Zeigen Sie:

(a) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow \langle A_1 \rangle \subseteq \langle A_2 \rangle$.

(b) $\langle A_1 \cap A_2 \rangle \subseteq \langle A_1 \rangle \cap \langle A_2 . \rangle$

(c) $\langle A_1 \cup A_2 \rangle = \langle \langle A_1 \rangle \cup \langle A_2 \rangle \rangle$.

(d) $\langle A_1 \cup A_2 \rangle = \langle A_1 \rangle \cup \langle A_2 \rangle \Leftrightarrow \langle A_1 \rangle \subseteq \langle A_2 \rangle$ oder $\langle A_2 \rangle \subseteq \langle A_1 \rangle$.

4. Aufgabe: (4 Punkte) Erweitern Sie die linear unabhängige Menge

$$\{x^5, x^3 - x^2\} \subseteq \mathbb{R}[x]$$

zu einer Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}[x]$.