Übungen zur Linearen Algebra I – Blatt6

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)
e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de

Abgabe: Bis Mittwoch (14:00) in den jeweiligen Briefkästen im Mathematischen Institut.

Es seien V, W jeweils endlichdimensionale Vektorräume über einem Körper K.

1. Aufgabe: (2 Punkte) Es sei $\phi : V \to W$ ein bijektiver Homomorphismus. Zeigen Sie, daß $\phi^{-1} : W \to V$ ebenfalls ein Homomorphismus ist.

2. Aufgabe: (6 Punkte) Man bestimme die Dimension von $\mathrm{End}(V)$ in Abhängigkeit von der Dimension von V sowie die Anzahl der Elemente von

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p) := \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_p^2) := \{a \in \mathrm{End}(\mathbb{F}_p^2) \mid a \text{ ist Automorphismus}\},$$

wobei $\mathbb{F}_p$ der endliche Körper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (p Primzahl) ist.

3. Aufgabe: (4 Punkte) Zeigen Sie, daß es zu jedem surjektiven Homomorphismus $\phi : V \to W$ einen Homomorphismus $\sigma : W \to V$ gibt mit $\phi \circ \sigma = \mathrm{id}_W$.

4. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei $\phi : V \to W$ ein Homomorphismus. Zeigen Sie die folgenden Behauptungen:

(a) $E \subseteq V \Rightarrow \phi(\langle E \rangle_K) = \langle \phi(E) \rangle_K$.

(b) Wenn $E \subseteq V$ linear abhängig ist, dann ist auch $\phi(E) \subseteq W$ linear abhängig.

(c) Sei $E \subseteq V$, so daß $\phi(E) \subseteq W$ linear unabhängig ist. Dann ist auch E linear unabhängig.

(d) Wenn ϕ injektiv ist, dann gilt in den Punkten (b) und (c) auch der Umkehrschluß.