Übungen zur Linearen Algebra I – Blatt7

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)
e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de

Abgabe: Bis Mittwoch (14:00) in den jeweiligen Briefkästen im Mathematischen Institut.

Es seien V, W jeweils Vektorräume über einem Körper K und V^*, W^* ihre Dualräume.

1. Aufgabe: (4 Punkte) Man zeige, daß die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) \to \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*),\ f \mapsto f^*$$

linear ist ($f^* : W^* \to V^*$ sei hierbei die duale Abbildung zu f).

2. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei V endlichdimensional. Für einen Unterraum $U \subseteq V$ setze man

$$U^\circ := \{\phi \in V^* \mid \phi(U) = 0\}.$$

Man zeige, daß für Unterräume $U, U' \subseteq V$ das folgende gilt:

(a) $(U + U')^\circ = U^\circ \cap (U')^\circ$,

(b) $(U^\circ)^\circ = U$,

(c) $(U \cap U')^\circ = U^\circ + (U')^\circ$,

(d) $\dim U + \dim U^\circ = \dim V$.

3. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei U ein Unterraum von V und $\pi : V \to V/U$, $v \mapsto v + U$ die *natürliche Projektion.* Zeigen Sie, das für jeden Homomorphismus $\phi : V \to W$, dessen Kern den Raum U enthält, ein Homomorphismus $\psi : V/U \to W$ existiert mit $\phi = \psi \circ \pi$.

4. Aufgabe: (4 Punkte) Es seien V, W endlichdimensional. Sei $f : V \to W$ ein Homomorphismus. Der *Kokern* von f ist definiert als der Faktorraum $\mathrm{coker}(f) := W/\mathrm{im}(f)$. Zeigen Sie, daß

$$\mathrm{coker}(f^*) \simeq (\ker(f))^*$$

gilt.