Übungen zur Linearen Algebra I – Blatt8

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)
e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de

Abgabe: Bis Mittwoch (14:00) in den jeweiligen Briefkästen im Mathematischen Institut.

1. Aufgabe: (4 Punkte) Es seien U, V, W endlichdimensionale K-Vektorräume mit Basen X, Y, Z. Rechnen Sie direkt nach, daß für lineare Abbildungen $f : U \to V$ und $g : V \to W$ das folgende gilt:

$$A_{g\circ f,X,Z} = A_{g,Y,Z} \cdot A_{f,X,Y}.$$

2. Aufgabe: (4 Punkte) Beweisen Sie die folgenden Regeln für Matrizen geeigneter Dimension (mit Einträgen in einem Körper K):

$$A + B = B + A,$$
$$A(B + C) = AB + AC,$$
$$(A + B)C = AC + BC$$
$$(aA)B = A(aB) = a(AB) \quad \forall a \in K.$$

Folgern Sie, daß der Vektorraum $K^{n\times n}$ der $n \times n$-Matrizen durch die Matrixmultiplikation zu einem Ring wird. Wann ist dieser Ring nullteilerfrei, bzw. kommutativ (Begründung)?

3. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei $K[x]_n$ der K-Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$. Berechnen Sie für $n = 4$ die Darstellungsmatrizen A_{δ,X_i,X_i}, $i = 1, 2$, der linearen Abbildung

$$\delta : K[x]_n \to K[x]_n,\ p(x) \mapsto p'(x) = \frac{d}{dx}(p(x))$$

bezüglich der Basen

$$X_1 := \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$

und

$$X_2 := \{1, 1 + x, 1 + x + x^2, \dots, 1 + x + x^2 + \cdots + x^n\}.$$

4. Aufgabe: (4 Punkte) Man wähle in den angegeben K-Vektorräumen eine Basis W und bestimme zu den linearen Abbildungen $f : V \to V$ jeweils die zugehörige Darstellungsmatrix $A_{f,W,W}$:

(a) $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$, f ist Drehung um den Winkel θ.

(b) $V = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}$, f ist Spiegelung an der Geraden $y = x$.

(c) $V = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$, f ist Multiplikation mit $\alpha + \beta \cdot i$, wobei $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.