Übungen zur Linearen Algebra I – Blatt9

Dr. M. Dettweiler (INF 368, Zi. 513, Tel. 548870)
e-mail: michael.dettweiler@iwr.uni-heidelberg.de

Abgabe: Bis Mittwoch (14:00) in den jeweiligen Briefkästen im Mathematischen Institut.

1. Aufgabe: (4 Punkte) Es seien V, W endlichdimensionale Vektorräume der Dimensionen m, n über K. Es sei $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, daß ϕ genau dann injektiv, bzw. surjektiv, ist, wenn eine Darstellungsmatrix von ϕ Spaltenrang m, bzw. Zeilenrang n, besitzt.

2. Aufgabe: (4 Punkte) Es seien $A, B \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie die Gleichheit

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}$$

(A^{T} bezeichne die transponierte Matrix von A).

3. Aufgabe: (4 Punkte) Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum der Dimension n über einem Körper K, $U \leq V$ ein Unterraum der Dimension $m < n$ und $\phi : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $\phi(U) \subseteq U$. Man zeige, daß es eine Basis X von V gibt, so daß die Abbildungsmatrix $A_{\phi,X,X}$ von der folgenden Form ist:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

wobei $A \in K^{m\times m}$ und $0 \in K^{(n-m)\times m}$ die Nullmatrix ist (und B, D Matrizen geeigneter Dimensionen sind).

4. Aufgabe: (4 Punkte) Es seien

$$\begin{aligned}
x_1 &= (1,1,1,1)^{\mathrm{T}}, & y_1 &= (1,0,3,3)^{\mathrm{T}},\\
x_2 &= (1,2,1,1)^{\mathrm{T}}, & y_2 &= (-2,-3,-5,-4)^{\mathrm{T}},\\
x_3 &= (1,1,2,1)^{\mathrm{T}}, & y_3 &= (2,2,5,4)^{\mathrm{T}},\\
x_4 &= (1,3,2,3)^{\mathrm{T}}, & y_4 &= (-2,-3,-4,-4)^{\mathrm{T}}
\end{aligned}$$

Vektoren aus $\mathbb{R}^4$ und sei $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$. Man zeige, daß $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ und $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ Basen von $\mathbb{R}^4$ sind und man berechne die Darstellungsmatrizen $A_{\phi,E,E}$, bzw. $A_{\phi,X,E}$, bzw. $A_{\phi,X,Y}$, der linearen Abbildung

$$\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4, \quad \sum_{i=1}^{4} \alpha_i x_i \mapsto \sum_{i=1}^{4} \alpha_i y_i \quad (\alpha_i \in \mathbb{R}).$$