(Pro)Seminar: Matrizen und Lie-Gruppen

Wintersemester 2019/20

Prof. Dr. Werner M. Seiler

1. Gruppen. Gruppen, Gruppenhomomorphismen, Gruppenoperationen auf einer Menge, Untergruppen, Normalteiler, Faktorgruppe. [K, 2], [SP, 5, 6], [C, 1A], [S, 2.1/2], [Bö, 2]

2. Matrixgruppen. $Gl(n, \mathbb{R})$, wichtige Untergruppen, Begriff einer lokalen Gruppe, Wiederholung der Begriffe offen, abgeschlossen, zusammenhängend. [K, 2,3.1], [B, 1], [S, 8.1/6], [T, 4.1/3]

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen. Vektorfeld/dynamisches System, Fluss, Satz von Picard-Lindelöf, 1-Parametergruppe. [K, 4], [A, 1.1/2, 2.3, 3.1-3]

4. Gruppen und Geometrie. affine Gruppe, euklidische Gruppe, projektive Geometrie, Lorentz-Gruppe. [K, 5.1/2/4/7]

5. Exponentialfunktion und Logarithmus. Verallgemeinerung von Exponentialfunktion und Logarithmus auf Matrizen, 1-Parameter-Untergruppen von Matrizen. [K, 6.1-3], [B, 2], [C, 4A-C], [S, 4], [T, 6]

6. Tangentialraum und Lie-Algebren. Tangentialraum an der Einheitsmatrix, Beispiele, abgeschlossene Untergruppen, Untergruppen und Untermannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$, Lie-Algebra einer Matrixgruppe, abstrakte Lie-Algebren. [K, 7], [B, 3.1-3], [C, 4D], [S, 5.1-4], [T, 5], [Bö, 5]

7. Lie-Unteralgebren und BCH-Formel. Lie-Unteralgebren, Zusammenhang mit Lie-Untergruppen, Baker-Campbell-Hausdorff-Formel. [K, 8], [S, 7.6/7]

8. Mannigfaltigkeiten und abstrakte Lie-Gruppen. Definition einer Mannigfaltigkeit (ohne Topologie), Beispiele, Tangentialraum, Differential, abstrakte Definition einer Lie-Gruppe. [K, 9], [B, 7.1-4], [C, 12A-C], [T, 7.4/5], [Bö, 4] (für weitere Hintergrundinformationen können [Ba], [O] und [W] benutzt werden)

9. Adjungierte Darstellung. Definition der adjungierten Abbildung, Lie-Klammer, Lie-Algebra einer abstrakten Lie-Gruppe, Jacobi-Identität. [K, 10], [T, 8] (siehe auch [O] und [W])

10. Linksinvariante Vektorfelder. Vektorfelder auf allgemeinen Mannigfaltigkeiten, links- oder rechtsinvariante Vektorfelder, Zusammenhang mit der Lie-Algebra, Strukturkonstanten einer Lie-Algebra, Lie-Ableitung, geometrische Interpretation der Lie-Klammer über den Fluss linksinvarianter Vektorfelder. [K, 11] (siehe auch [O] und [W])

11. Exponentialabbildung. 1-Parameteruntergruppen definiert durch Elemente der Lie-Algebra, abstrakte Exponentialabbildung, Zusammenhang mit der adjungierten Darstellung. [K, 12] (siehe auch [O] und [W])

12. Homomorphismen und Unterstrukturen. Homomorphismen von Lie-Gruppen/Algebren, Lie-Untergruppen/-algebren, Zusammenhang mit der adjungierten Abbildung, Baker-Campbell-Hausdorff-Formel für abstrakte Lie-Unteralgebren. [K, 13], [S, 6.1/2]

13. Quotienten von Lie-Gruppen. Homomorphiesatz für Gruppen, Ideale in Algebren, Homomorphiesatz für Lie-Algebren, Zusammenhang zwischen Idealen in der Lie-Algebra und Normalteilern in der Lie-Gruppe, Homomorphiesatz für Lie-Gruppen, homogene Räume. [K, 14], [B, 8.1/2], [T, 10.3-5]

14. Überlagerungen. Definition der Überlagerung einer Mannigfaltigkeit durch eine andere, Decktransformation, Fundamentalgruppe, einfach zusammenhängende Gruppen, Lift von Lie-Algebren-Homomorphismen zu Lie-Gruppen-Homomorphismen. [K, 16], [S, 8.7,9], [Bö, 6.6]

Literatur

[A] Bernd Aulbach: Gewöhnliche Differenzialgleichungen

[Ba] Werner Ballmann: Einführung in die Geometrie und Topologie

[B] Andrew Baker: Matrix Groups

[Bö] Manfred Böhm: Lie-Gruppen und Lie-Algebren in der Physik

[C] Morton Curtis: Matrix Groups

[K] Wolfgang Kühnel: Matrizen und Lie-Gruppen

[O] Peter Olver: Applications of Lie Groups to Differential Equations

[SP] Rainer Schulze-Pillot: Elementare Algebra und Zahlentheorie

[S] John Stillwell: Naive Lie Theory

[T] Kristopher Tapp: Matrix Groups for Undergraduates

[W] Frank Warner: Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups