Prof. Werner M. Seiler, Ph.D.
FB 17 Mathematik
Computational Mathematics

UNIKASSEL VERSITÄT

16. November 2009

2. Übungsblatt Mathematik III

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_1 \\ 3y_2 \\ -\pi y_3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ e \\ \pi \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das lineare System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. Lösen Sie das inhomogene Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 14 \\ -7 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2xe^{5x} - \cos(x)e^{-2x} \\ -xe^{5x} + \cos(x)e^{-2x} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. Berechnen Sie die allgemeine Lösung der linearen Differentialgleichung

$$y''' + 5y'' + 3y' - 9y = 0\,.$$

Aufgabe 5. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' + y' - 6y = e^{2x}, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -\frac{14}{5}.$$

Aufgabe 6. Bestimmen Sie die allgemeine *reelle* Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x} + 2x + 2\,.$$

Bitte wenden!

Aufgabe 7. Die „Variation der Konstanten" zur Bestimmung einer speziellen Lösung eines inhomogenen linearen Systems ist meistens ziemlich rechenintensiv. In manchen Fällen kann man mit einem geschickten Ansatz viel Arbeit sparen. Dies wollen wir hier für eine lineare Gleichung zweiter Ordnung mit einer besonders einfachen Inhomogenität genauer untersuchen.

(i) Für vorgebene Konstanten $a_0, a_1, b \in \mathbb{R}$ sei die inhomogene Differentialgleichung

$$y^{''} + a_1 y^{'} + a_0 y = e^{bx}$$

zu lösen. Die Zahl $k \in \{0, 1, 2\}$ gebe an, wie oft b als Nullstelle des Polynoms $x^2 + a_1 x + a_0$ auftritt. Zeigen Sie, daß es eine reelle Zahl c gibt, so daß die Funktion

$$y(x) = cx^k e^{bx}$$

eine Lösung der obigen Differentialgleichung ist.

(ii) Bearbeiten Sie nun noch einmal Aufgabe 5.

(iii) Bestimmen Sie alle *reellen* Lösungen der Differentialgleichung

$$y^{''} + y = e^{5x} .$$