Prof. Werner M. Seiler, Ph.D.
FB 17 Mathematik
Computational Mathematics

UNIKASSEL VERSITÄT

14. Dezember 2009

3. Übungsblatt Mathematik III

Aufgabe 1. Überprüfen Sie, ob die folgenden komplexen Folgen $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ konvergieren und berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

1. $z_n = \dfrac{(2+i)n^2}{1-in^2}$
2. $z_n = \dfrac{e^{in}}{n^2+in}$

Aufgabe 2. Prüfen Sie, ob der Grenzwert $\lim\limits_{z\to 0} e^{-\frac{1}{z}}$ existiert und geben Sie ihn gegebenenfalls an.

Aufgabe 3. Die komplexen hyperbolischen Funktionen sind definiert durch

$$\sinh(z) = \tfrac{1}{2}(e^z - e^{-z}) \quad \text{und} \quad \cosh(z) = \tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z})\,.$$

1. Zeigen Sie, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$.
2. Zeigen Sie, daß für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt: $\sin(z) = -i\sinh(iz)$ und $\cos(z) = \cosh(iz)$.
3. Beweisen Sie, daß beide Funktionen holomorph sind und ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung $y'' - y = 0$ bilden.

Aufgabe 4. Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ holomorph sind.

1. $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$
2. $f(z) = \bar{z}^2$

Aufgabe 5. Wir betrachten den Hauptwert $\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ des komplexen Logarithmus.

1. Zeigen Sie, daß $\log(z)$ auf der Halbgeraden $H = \{z \mid \text{Im}(z) = 0,\ \text{Re}(z) \le 0\}$ nicht stetig ist.
2. Zeigen Sie mit Hilfe der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, daß $\log(z)$ für alle Zahlen $z \in \mathbb{C} \setminus H$ komplex differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung.