Prof. Werner M. Seiler, Ph.D.
FB 17 Mathematik
Computational Mathematics

UNI KASSEL VERSITÄT

25. Januar 2010

4. Übungsblatt Mathematik III

Aufgabe 1.

1. Geben Sie mit geeignet gewählten Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$ eine glatte Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ an mit dem Anfangspunkt $\gamma(a) = -2 - i$ und dem Endpunkt $\gamma(b) = 1 + 2i$. Berechnen Sie für diese Kurve das Integral $\int_\Gamma z^2 dz$.
2. Zeichnen Sie in der komplexen Ebene die Kurve $\gamma : [1, 2] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = te^{2\pi it}$. Berechnen Sie für diese Kurve das Integral $\int_\Gamma \bar{z} dz$.

Aufgabe 2. Es sei Γ_1 eine Kurve von $z_0 = 0$ zu $z_1 = 1 + i$, so daß für alle $z \in \Gamma_1$ gilt $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z)^2$. Analog sei Γ_2 eine Kurve mit $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z)^3$. Berechnen Sie für die beiden Funktionen $f(z) = z$ bzw. $g(z) = \bar{z}$ die vier Kurvenintegrale

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz\,, \quad \int_{\Gamma_2} f(z)dz\,, \quad \int_{\Gamma_1} g(z)dz\,, \quad \int_{\Gamma_2} g(z)dz\,.$$

Können Sie das Ergebnis mit Hilfe von Sätzen aus der Vorlesung interpretieren?

Aufgabe 3. Überprüfen Sie, ob die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 2z}$$

an den Stellen $z_0 = -2$ bzw. $z_1 = 2i$ holomorph ist. Berechnen Sie dort, wo die Funktion holomorph ist, ihre Taylor-Reihe.

Aufgabe 4. Was für Singularitäten besitzt die Funktion

$$f(z) = \frac{z^2 + 2z}{z^3 - 3z + 2}\,?$$

Berechnen Sie das Residuum von f an den Polstellen.

Aufgabe 5. Es sei $\Gamma_2(0)$ der Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius 2. Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Kurvenintegral

$$\int_{\Gamma_2(0)} \frac{z^2 - 2iz + 3}{z^3 + 2iz^2 + 3z} dz\,.$$