Aufgabe 1 (Riemannsche Zetafunktion)
Bestimmen Sie über das hyperbolische Sinusprodukt und der zugehörigen Potenzreihe den Wert von

$$\zeta(6) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}.$$

Hinweis: Sei

$$S_m = \sum_{k=1}^{\infty} {\alpha_k}^m \quad \text{und} \quad A_m = \sum_{k_1<k_2<\ldots<k_m} \alpha_{k_1} \cdot \alpha_{k_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_{k_m}.$$

Bestimmen Sie eine allgemeine Formel für S_3. Betrachten Sie dazu A_1^3.

(4 Punkte)

Aufgabe 2 (Taylorreihen)
Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass die „abgeleiteten Funktionen“ (die Lagrange mit $f'(x), f''(x), f'''(x), \ldots$ bezeichnete) aus der Taylorschen Reihe

$$f(x+i) = f(x) + f'(x)i + \frac{1}{2!}f''(x)i^2 + \frac{1}{3!}f'''(x)i^3 + \ldots$$

tatsächlich die Ableitungen von $f(x)$ darstellen.

(4 Punkte)