Übungsblatt 3

<u>Aufgabe 1</u> Seien $S, A, B \in \nabla$ mit $S \notin \{A, B\}$ und $g = \overline{SA}$, $h = \overline{SB}$ zwei Halbgeraden mit Anfangspunkt S.

Ferner seien $A', B' \in \nabla$ mit $S \neq A' \neq A$, $S \neq B' \neq B$ und $A' \in g$ und $B' \in h$.

Zu zeigen: $\sphericalangle(ASB) = \sphericalangle(A'SB')$

I. $\sphericalangle(ASB)$ ist Nullwinkel. $\Rightarrow$ Alle Punkte S, A, A', B, B' sind kollinear.

(i) $S < A < B \Rightarrow$ (a) $S < A' < B'$ oder (b) $S < B' < A'$

(ii) $S < B < A \Rightarrow$ (a) $S < B' < A'$ oder (b) $S < A' < B'$

(iii) $B < A < S \Rightarrow$ (a) $B' < A' < S$ oder (b) $A' < B' < S$

(iv) $A < B < S \Rightarrow$ (a) $A' < B' < S$ oder (b) $B' < A' < S$

In allen Fällen ist $\sphericalangle(A'SB')$ auch Nullwinkel.

II. $\sphericalangle(ASB)$ ist gestreckter Winkel $\Rightarrow$ Alle Punkte S, A, A', B, B' sind kollinear.

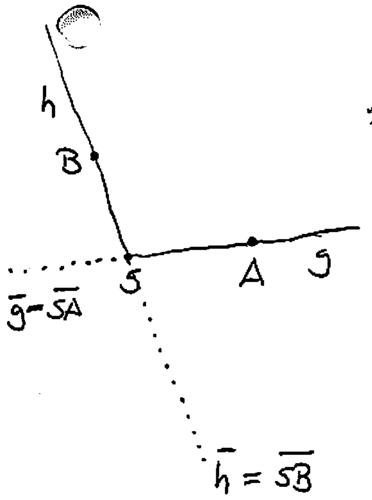
(i) $A < S < B \Rightarrow A' < S < B'$

(ii) $B < S < A \Rightarrow B' < S < A'$

In beiden Fällen ist $\sphericalangle(A'SB')$ auch gestreckter Winkel.

III. $\sphericalangle(ASB)$ ist Innenwinkel $\Rightarrow S, A, B$ sind nicht kollinear

$\Rightarrow S, A', B'$ sind nicht kollinear.



$\sphericalangle(ASB) = (H_{gB} \cap H_{hA}) \cup (g \cup h)$

Zu zeigen ist: A' liegt auf derselben Seite von $\bar{h} = \overline{SB}$ wie A und B' " " " " " $\bar{g} = \overline{SA}$ " B,

denn dann gilt: $H_{gB} = H_{gB'}$ und $H_{hA} = H_{hA'}$.

Es gilt nach Voraussetzung $\overline{SA} \cap \bar{h} = \{S\}$.

Wegen $A' \in \overline{SA}$ und $A' \neq S$ folgt $\overline{AA'} \subset \overline{SA} \setminus \{S\}$.

Also gilt $\overline{AA'} \cap \bar{h} = \emptyset$ (wegen $\overline{SA} \setminus \{S\} \cap \bar{h} = \emptyset$).

B, B' analog.

$\Rightarrow \sphericalangle(ASB) = \sphericalangle(A'SB')$.

IV. $\sphericalangle(ASB)$ ist Aussenwinkel $\Rightarrow$ $\sphericalangle(BSA)$ ist Innenwinkel

$\overset{\text{III.}}{\Rightarrow}$ $\sphericalangle(BSA) = \sphericalangle(B'SA')$

$\Rightarrow$ $\sphericalangle(A'SB') = \sphericalangle(ASB)$

<u>Aufgabe 2</u> (a) $M \neq \emptyset$, $B(M)$: Menge aller bijektiven Abbildungen auf M

Zu zeigen: $(B(M), \circ)$ ist Gruppe.

1 (i) Assoziativität: Für Abbildungen gilt allgemein: $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$,

also gilt insbesondere $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ für $f,g,h \in B(M)$

3 (ii) Abgeschlossenheit: Seien $f,g \in B(M)$. Zu zeigen: $f \circ g \in B(M)$.

I. injektiv: Es gelte $(f \circ g)(x) = (f \circ g)(y)$

$\Rightarrow f(g(x)) = f(g(y)) \overset{f \text{ inj.}}{\Rightarrow} g(x) = g(y)$

$\overset{g \text{ inj.}}{\Rightarrow} x = y$

II. surjektiv: Sei $y \in M$. Zu zeigen: Es ex. $x \in M$ mit

$(f \circ g)(x) = y$.

Definiere $\tilde{x} := g^{-1}(f^{-1}(y))$.

(g^{-1}, f^{-1} existieren, da g,f bijektiv)

$\Rightarrow (f \circ g)(\tilde{x}) = f(g(g^{-1}(f^{-1}(y))))$

$= f(f^{-1}(y)) = y$

(III. $f \circ g : M \to M$ klar)

(iii) neutrales Element: $id : M \to M$, $id \in B(M)$ (klar)

Es gilt: $f \circ id = f$ und $id \circ f = f$ für $f \in B(M)$

(iv) inverses Element: Sei $f \in B(M)$ $\Rightarrow$ Dann ex. Umkehrabbildung f^{-1}

$\Rightarrow f^{-1} \in B(M)$, da f Umkehrabb. zu f^{-1}.

also $f \circ f^{-1} = id$ und $f^{-1} \circ f = id$

(b) Zu zeigen: Geradenspiegelungen sind bijektive Abbildungen.

(i) Bemerkung 1.30 + Jede Involution ist eine Bijektion und es gilt $S_g = S_g^{-1}$.

oder (ii) Sei $S_g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $P \mapsto P' := S_g(P)$ eine Geradenspiegelung bzgl. $g \subset \mathcal{E}$.

I. injektiv: Es gelte $P_3 := S_g(P_1) = S_g(P_2)$

$\Rightarrow$ (a) $P_3 \in g$: $\Rightarrow$ $P_3 = P_1 = P_2$

(b) $P_3 \notin g$: Es gilt $g \perp \overline{P_1P_3}$ und $g \perp \overline{P_2P_3}$

und $\{S\} = \overline{P_1P_3} \cap g = \overline{P_2P_3} \cap g$.

$\overset{\text{Ax.13}}{\Rightarrow}$ Zu der Geraden g gibt es durch den Punkt S genau eine Senkrechte, also $\overline{P_1P_3} = \overline{P_2P_3}$

Ferner gilt $|P_3S| = |P_1S| = |P_2S|$,

also $P_1 = P_2$.

II. surjektiv: Sei $P' \in \mathcal{E}$. Zu zeigen: Es ex. $P \in \mathcal{E}$ mit $S_g(P) = P'$.

(a) $P' \in g$: Es ex. $P \in \mathcal{E}$ mit $S_g(P) = P'$, nämlich $P = P'$.

(b) $P' \notin g$: Aus Satz 1.28 folgt $S_g(P') = P$, also

$S_g(P) = S_g(\underline{S_g(P')}) = P'$.