Aufgabe 1 (Exponential- und Logarithmusfunktionen)

(a) Bestimmen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$$

mit Hilfe der Regel von l'Hospital.

(b) Bestimmen Sie eine Näherung der eulerschen Zahl e mit der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1^k}{k!},$$

die auf mindestens zehn Nachkommastellen exakt ist. Euler hat auf diese Weise eine Approximation der Zahl e bestimmt, die sogar auf 23 Nachkommastellen genau ist.

(4 Punkte)

Aufgabe 2 (Reihenentwicklung der Arcus-Tangensfunktion)
Sie haben in der Vorlesung die bekannte *Eulersche Formel*

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

kennen gelernt. Leiten Sie durch folgende Schritte die Reihenentwicklung der Arcus-Tangensfunktion $\arctan(x)$ her.

(a) Sei N eine „unendlich große“ natürliche Zahl, $z \in \mathbb{R}$ und $x = \frac{z}{N}$. Zeigen Sie zunächst

$$\frac{z}{N} = \frac{1}{2i}\left(\left(e^{iz}\right)^{\frac{1}{N}} - \left(e^{-iz}\right)^{\frac{1}{N}}\right)$$

und daraus unter Berücksichtigung von Aufgabe 1.(a)

$$z = \frac{1}{2i}\left(\log(e^{iz}) - \log(e^{-iz})\right).$$

(b) Zeigen Sie die Gleichung

$$z = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{1 + i\tan(z)}{1 - i\tan(z)}\right).$$

(c) Verwenden Sie nun die Logarithmusreihe, um die Gleichung

$$z = \tan(z) - \frac{\tan^3(z)}{3} + \frac{\tan^5(z)}{5} - \dots$$

herzuleiten. Bestimmen Sie aus der letzten Gleichung die Reihenentwicklung von $\arctan(x)$.

(6 Punkte)

Abgabetermin: Dienstag, 03.07.2012, 08.15 Uhr in der Übung.