Algorithmen für q-holonome Funktionen und q-hypergeometrische Potenzreihen

Torsten Sprenger
Universität Kassel

CA-Tagung Kaiserslautern

30. Mai 2007

Gliederung

Gliederung

Gliederung

Gliederung

Gliederung

Gliederung

Motivation zur q-Analysis

Analysis

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$D_h f(x) = \frac{\Delta_h f(x)}{\Delta_h x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} D_h f(x)$$

q-Analysis

$$\Delta_q f(x) = f(x) - f(qx)$$

$$D_q f(x) = \frac{\Delta_q f(x)}{\Delta_q x} = \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}$$

$$f'(x) = \lim_{q \to 1} D_q f(x)$$

Motivation zur q-Analysis

Analysis

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$D_h f(x) = \frac{\Delta_h f(x)}{\Delta_h x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} D_h f(x)$$

q-Analysis

$$\Delta_q f(x) = f(x) - f(qx)$$

$$D_q f(x) = \frac{\Delta_q f(x)}{\Delta_q x} = \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}$$

$$f'(x) = \lim_{q \to 1} D_q f(x)$$

Notation

Generalvoraussetzungen

- q: reelle Zahl zwischen 0 und 1
- $\mathbb{K}$: Körper der Charakteristik 0
- $\mathbb{F} = \mathbb{K}(q)$

q-Operatoren

- q-Shiftoperator ε_q

$$\varepsilon_q f(x) := f(qx)$$

- q-Differential- bzw. Hahnoperator D_q

$$D_q f(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(qx)}{(1-q)x}, & x \neq 0 \\ \lim\limits_{t\to 0} D_q f(t), & x = 0 \end{cases}$$

$D_q f(x)$ nennt man *q-Ableitung* von $f(x)$.

Notation

Generalvoraussetzungen

- q: reelle Zahl zwischen 0 und 1
- $\mathbb{K}$: Körper der Charakteristik 0
- $\mathbb{F} = \mathbb{K}(q)$

q-Operatoren

- q-Shiftoperator ε_q

$$\varepsilon_q f(x) := f(qx)$$

- q-Differential- bzw. Hahnoperator D_q

$$D_q f(x) := \begin{cases} \frac{f(x)-f(qx)}{(1-q)x}, & x \neq 0 \\ \lim\limits_{t\to 0} D_q f(t), & x = 0 \end{cases}$$

$D_q f(x)$ nennt man q-*Ableitung* von $f(x)$.

Elementare Definitionen

q-Hypergeometrische Terme

Einen Term $f(x)$ nennt man *q-hypergeometrisch*, wenn

$$\frac{\varepsilon_q f(x)}{f(x)} = \frac{f(qx)}{f(x)} = r(x) \in \mathbb{F}(x)$$

gilt. Die Funktion $r(x)$ nennt man *q-Zertifikat* von $f(x)$.

q-Hypergeometrische Potenzreihen

Eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ nennt man *q-hypergeometrisch*, wenn der Koeffizient a_k q-hypergeometrisch ist, d.h. wenn

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \in \mathbb{F}(q^k)$$

gilt.

Elementare Definitionen

q-Hypergeometrische Terme

Einen Term $f(x)$ nennt man *q-hypergeometrisch*, wenn

$$\frac{\varepsilon_q f(x)}{f(x)} = \frac{f(qx)}{f(x)} = r(x) \in \mathbb{F}(x)$$

gilt. Die Funktion $r(x)$ nennt man *q-Zertifikat* von $f(x)$.

q-Hypergeometrische Potenzreihen

Eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ nennt man *q-hypergeometrisch*, wenn der Koeffizient a_k q-hypergeometrisch ist, d.h. wenn

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \in \mathbb{F}(q^k)$$

gilt.

q-Funktionen

Einfache & spezielle q-Funktionen

- q-basische Zahl: $[n]_q := \frac{1-q^n}{1-q}, \quad n \in \mathbb{Z}$
- q-Fakultät: $[n]_q! := \begin{cases} [n]_q \cdot [n-1]_q \cdot \ldots \cdot [1]_q, & n \in \mathbb{N} \\ 1, & n = 0 \end{cases}$
- q-Pochhammersymbol:
$$(a;q)_k := \begin{cases} (1-a)\cdot(1-aq)\cdot\ldots\cdot(1-aq^{k-1}), & k \in \mathbb{N} \\ 1, & k = 0 \\ \frac{1}{(1-aq^{-1})\cdot(1-aq^{-2})\cdot\ldots\cdot(1-aq^{k})}, & k \in -\mathbb{N} \end{cases}$$
- q-Binomialkoeffizient: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}}, \quad n, k \in \mathbb{N}_0$

q-Funktionen

Einfache & spezielle q-Funktionen

- q-basische Zahl: $[n]_q := \frac{1-q^n}{1-q}, \quad n \in \mathbb{Z}$
- q-Fakultät: $[n]_q! := \begin{cases} [n]_q \cdot [n-1]_q \cdot \ldots \cdot [1]_q, & n \in \mathbb{N} \\ 1, & n = 0 \end{cases}$
- q-Pochhammersymbol:

$$(a;q)_k := \begin{cases} (1-a)\cdot(1-aq)\cdot\ldots\cdot(1-aq^{k-1}), & k \in \mathbb{N} \\ 1, & k = 0 \\ \frac{1}{(1-aq^{-1})\cdot(1-aq^{-2})\cdot\ldots\cdot(1-aq^{k})}, & k \in -\mathbb{N} \end{cases}$$

- q-Binomialkoeffizient: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}}, \quad n, k \in \mathbb{N}_0$

q-Funktionen

Einfache & spezielle q-Funktionen

- q-basische Zahl: $[n]_q := \frac{1-q^n}{1-q}, \quad n \in \mathbb{Z}$
- q-Fakultät: $[n]_q! := \begin{cases} [n]_q \cdot [n-1]_q \cdot \ldots \cdot [1]_q, & n \in \mathbb{N} \\ 1, & n = 0 \end{cases}$
- q-Pochhammersymbol:

$$(a;q)_k := \begin{cases} (1-a)\cdot(1-aq)\cdot\ldots\cdot(1-aq^{k-1}), & k \in \mathbb{N} \\ 1, & k = 0 \\ \frac{1}{(1-aq^{-1})\cdot(1-aq^{-2})\cdot\ldots\cdot(1-aq^{k})}, & k \in -\mathbb{N} \end{cases}$$

- q-Binomialkoeffizient: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}}, \quad n, k \in \mathbb{N}_0$

q-Funktionen

Einfache & spezielle q-Funktionen

- q-basische Zahl: $[n]_q := \frac{1-q^n}{1-q}, \quad n \in \mathbb{Z}$
- q-Fakultät: $[n]_q! := \begin{cases} [n]_q \cdot [n-1]_q \cdot \ldots \cdot [1]_q, & n \in \mathbb{N} \\ 1, & n = 0 \end{cases}$
- q-Pochhammersymbol:

$$(a;q)_k := \begin{cases} (1-a)\cdot(1-aq)\cdot\ldots\cdot(1-aq^{k-1}), & k \in \mathbb{N} \\ 1, & k = 0 \\ \frac{1}{(1-aq^{-1})\cdot(1-aq^{-2})\cdot\ldots\cdot(1-aq^{k})}, & k \in -\mathbb{N} \end{cases}$$

- q-Binomialkoeffizient: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}}, \quad n, k \in \mathbb{N}_0$

q-Funktionen

Einfache & spezielle q-Funktionen

- q-basische Zahl: $[n]_q := \frac{1-q^n}{1-q}, \quad n \in \mathbb{Z}$
- q-Fakultät: $[n]_q! := \begin{cases} [n]_q \cdot [n-1]_q \cdot \ldots \cdot [1]_q\,, & n \in \mathbb{N} \\ 1, & n = 0 \end{cases}$
- q-Pochhammersymbol:

$$(a;q)_k := \begin{cases} (1-a)\cdot(1-aq)\cdot\ldots\cdot(1-aq^{k-1}), & k \in \mathbb{N} \\ 1, & k = 0 \\ \frac{1}{(1-aq^{-1})\cdot(1-aq^{-2})\cdot\ldots\cdot(1-aq^{k})}, & k \in -\mathbb{N} \end{cases}$$

- q-Binomialkoeffizient: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{(q;q)_n}{(q;q)_k (q;q)_{n-k}}, \quad n, k \in \mathbb{N}_0$

q-Funktionen

Verallgemeinerte q-hypergeometrische Funktion

Verallgemeinerte q-hypergeometrische Funktion:

$$ {}_r\phi_s\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_r \\ b_1, \ldots, b_s \end{matrix} \middle| \, q; x\right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1;q)_k \cdot \ldots \cdot (a_r;q)_k}{(b_1;q)_k \cdot \ldots \cdot (b_s;q)_k} \frac{x^k}{(q;q)_k} \left((-1)^k q^{\binom{k}{2}}\right)^{1+s-r} $$

q-Exponentialfunktionen (Askey-Scheme [KS98])

- kleine q-Exponentialfunktion:

$$ \exp_q(x) := {}_1\phi_0\left(\begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix} \middle| \, q; x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(q;q)_k} x^k $$

- große q-Exponentialfunktion:

$$ \mathrm{Exp}_q(x) := {}_0\phi_0\left(\begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \middle| \, q; -x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\binom{k}{2}}}{(q;q)_k} x^k $$

q-Funktionen

Verallgemeinerte q-hypergeometrische Funktion

Verallgemeinerte q-hypergeometrische Funktion:

$$ {}_r\phi_s\left(\begin{matrix} a_1, \ldots, a_r \\ b_1, \ldots, b_s \end{matrix} \middle| q; x\right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1;q)_k \cdot \ldots \cdot (a_r;q)_k}{(b_1;q)_k \cdot \ldots \cdot (b_s;q)_k} \frac{x^k}{(q;q)_k} \left((-1)^k q^{\binom{k}{2}}\right)^{1+s-r} $$

q-Exponentialfunktionen (Askey-Scheme [KS98])

- kleine q-Exponentialfunktion:
  $$ \exp_q(x) := {}_1\phi_0\left(\begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix} \middle| q; x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(q;q)_k} x^k $$
- große q-Exponentialfunktion:
  $$ \mathrm{Exp}_q(x) := {}_0\phi_0\left(\begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \middle| q; -x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\binom{k}{2}}}{(q;q)_k} x^k $$

q-Funktionen

q-Trigonometrische Funktionen (Askey-Scheme [KS98])

- kleine q-Sinusfunktion:

$$\sin_q(x) := \frac{\exp_q(ix)-\exp_q(-ix)}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(q;q)_{2k+1}} x^{2k+1}$$

- große q-Sinusfunktion:

$$\mathrm{Sin}_q(x) := \frac{\mathrm{Exp}_q(ix)-\mathrm{Exp}_q(-ix)}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k(2k+1)}}{(q;q)_{2k+1}} x^{2k+1}$$

- kleine q-Cosinusfunktion:

$$\cos_q(x) := \frac{\exp_q(ix)+\exp_q(-ix)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(q;q)_{2k}} x^{2k}$$

- große q-Cosinusfunktion:

$$\mathrm{Cos}_q(x) := \frac{\mathrm{Exp}_q(ix)+\mathrm{Exp}_q(-ix)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k(2k-1)}}{(q;q)_{2k}} x^{2k}$$

q-Funktionen

q-Trigonometrische Funktionen (Askey-Scheme [KS98])

- kleine q-Sinusfunktion:
  $$\sin_q(x) := \frac{\exp_q(ix)-\exp_q(-ix)}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(q;q)_{2k+1}} x^{2k+1}$$
- große q-Sinusfunktion:
  $$\mathrm{Sin}_q(x) := \frac{\mathrm{Exp}_q(ix)-\mathrm{Exp}_q(-ix)}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k(2k+1)}}{(q;q)_{2k+1}} x^{2k+1}$$
- kleine q-Cosinusfunktion:
  $$\cos_q(x) := \frac{\exp_q(ix)+\exp_q(-ix)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(q;q)_{2k}} x^{2k}$$
- große q-Cosinusfunktion:
  $$\mathrm{Cos}_q(x) := \frac{\mathrm{Exp}_q(ix)+\mathrm{Exp}_q(-ix)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k(2k-1)}}{(q;q)_{2k}} x^{2k}$$

q-Ableitungen und q-Shifts

Beispiele von q-Ableitungen und q-Shifts

- Potenzen:

$$D_q x^k = [k]_q\, x^{k-1} \quad \text{und} \quad \varepsilon_q x^k = q^k x^k$$

- q-Pochhammersymbol:

$$D_q\, (x;q)_k = \frac{[k]_q}{x-1}\, (x;q)_k \quad \text{und} \quad \varepsilon_q\, (x;q)_k = \frac{1-xq^k}{1-x}\, (x;q)_k$$

- kleine q-Exponentialfunktion:

$$D_q \exp_q(x) = \frac{1}{1-q} \exp_q(x) \quad \text{und} \quad \varepsilon_q \exp_q(x) = (1-x) \exp_q(x)$$

q-Ableitungen und q-Shifts

Beispiele von q-Ableitungen und q-Shifts

- Potenzen:

$$D_q x^k = [k]_q \, x^{k-1} \quad \text{und} \quad \varepsilon_q x^k = q^k x^k$$

- q-Pochhammersymbol:

$$D_q \, (x;q)_k = \frac{[k]_q}{x-1} (x;q)_k \quad \text{und} \quad \varepsilon_q \, (x;q)_k = \frac{1-xq^k}{1-x} (x;q)_k$$

- kleine q-Exponentialfunktion:

$$D_q \exp_q(x) = \frac{1}{1-q} \exp_q(x) \quad \text{und} \quad \varepsilon_q \exp_q(x) = (1-x)\exp_q(x)$$

q-Ableitungen und q-Shifts

Beispiele von q-Ableitungen und q-Shifts

- Potenzen:

$$D_q x^k = [k]_q \, x^{k-1} \quad \text{und} \quad \varepsilon_q x^k = q^k x^k$$

- q-Pochhammersymbol:

$$D_q \, (x;q)_k = \frac{[k]_q}{x-1} \, (x;q)_k \quad \text{und} \quad \varepsilon_q \, (x;q)_k = \frac{1-xq^k}{1-x} \, (x;q)_k$$

- kleine q-Exponentialfunktion:

$$D_q \exp_q(x) = \frac{1}{1-q} \exp_q(x) \quad \text{und} \quad \varepsilon_q \exp_q(x) = (1-x) \exp_q(x)$$

Konversionen zwischen q-Operatoren

Konversionsformeln

Es existieren folgende Zusammenhänge zwischen höheren q-Ableitungen und höheren q-Shifts

$$\varepsilon_q^{(n)} f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (1-q)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}} x^k D_q^{(k)} f(x)$$

$$D_q^{(n)} f(x) = \frac{1}{(1-q)^n x^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}-(n-1)k} \varepsilon_q^{(k)} f(x).$$

q-Holonome Differentialgleichungen und Rekursionen

q-Holonome Differentialgleichung

Unter einer *q-holonomen Differentialgleichung* für eine Funktion $f(x)$ versteht man eine Gleichung der Form

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) D_q^{(k)} f(x) = 0,$$

die linear und homogen ist und Koeffizienten $a_k(x)$ aus $\mathbb{F}[x]$ hat.

q-Holonome Rekursionsgleichung

Unter einer *q-holonomen Rekursionsgleichung* für eine Funktion $f(x)$ versteht man eine Gleichung der Form

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) \varepsilon_q^{(k)} f(x) = 0,$$

die linear und homogen ist und Koeffizienten $a_k(x)$ aus $\mathbb{F}[x]$ hat.

q-Holonome Differentialgleichungen und Rekursionen

q-Holonome Differentialgleichung

Unter einer *q-holonomen Differentialgleichung* für eine Funktion $f(x)$ versteht man eine Gleichung der Form

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) D_q^{(k)} f(x) = 0,$$

die linear und homogen ist und Koeffizienten $a_k(x)$ aus $\mathbb{F}[x]$ hat.

q-Holonome Rekursionsgleichung

Unter einer *q-holonomen Rekursionsgleichung* für eine Funktion $f(x)$ versteht man eine Gleichung der Form

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x) \varepsilon_q^{(k)} f(x) = 0,$$

die linear und homogen ist und Koeffizienten $a_k(x)$ aus $\mathbb{F}[x]$ hat.

q-Holonome Funktionen

q-Holonome Funktionen

Wir nennen $f(x)$ eine *q-holonome Funktion*, wenn sie eine q-holonome Differentialgleichung (bzw. Rekursionsgleichung) erfüllt.

Beispiele q-holonomer Funktionen

$f(x)$	q-Differentialgleichung für $f(x)$ (linke Seite)
x^k	$(q-1)xD_q f(x) + (1-q^k)f(x)$
$(x;q)_k$	$(q-1)(x-1)D_q f(x) + (1-q^k)f(x)$
$\exp_q(x)$	$(q-1)D_q f(x) + f(x)$
$\mathrm{Exp}_q(x)$	$(q-1)(x+1)D_q f(x) + f(x)$
$\sin_q(x)$	$(q-1)^2 D_q^2 f(x) + f(x)$
$\mathrm{Sin}_q(x)$	$(q-1)^2(1+x^2q^2)D_q^2 f(x) + qx(q-1)(q+1)D_q f(x) + qf(x)$
$\cos_q(x)$	$(q-1)^2 D_q^2 f(x) + f(x)$
$\mathrm{Cos}_q(x)$	$(q-1)^2(1+x^2q^2)D_q^2 f(x) + qx(q-1)(q+1)D_q f(x) + qf(x)$

q-Holonome Funktionen

q-Holonome Funktionen

Wir nennen $f(x)$ eine *q-holonome Funktion*, wenn sie eine q-holonome Differentialgleichung (bzw. Rekursionsgleichung) erfüllt.

Beispiele q-holonomer Funktionen

$f(x)$	q-Differentialgleichung für $f(x)$ (linke Seite)
x^k	$(q-1)xD_qf(x)+(1-q^k)f(x)$
$(x;q)_k$	$(q-1)(x-1)D_qf(x)+(1-q^k)f(x)$
$\exp_q(x)$	$(q-1)D_qf(x)+f(x)$
$\mathrm{Exp}_q(x)$	$(q-1)(x+1)D_qf(x)+f(x)$
$\sin_q(x)$	$(q-1)^2D_q^2f(x)+f(x)$
$\mathrm{Sin}_q(x)$	$(q-1)^2(1+x^2q^2)D_q^2f(x)+qx(q-1)(q+1)D_qf(x)+qf(x)$
$\cos_q(x)$	$(q-1)^2D_q^2f(x)+f(x)$
$\mathrm{Cos}_q(x)$	$(q-1)^2(1+x^2q^2)D_q^2f(x)+qx(q-1)(q+1)D_qf(x)+qf(x)$

Algorithmen für q-holonome Funktionen

Algorithmen zur Bestimmung q-holonomer Differentialgleichungen

Koepf, Rajković und Marinković stellen in [KRM07] einige Algorithmen vor, die das Ziel haben, q-Differentialgleichungen aufzustellen.

q-Rekursionsgleichungen statt q-Differentialgleichungen

Betrachtet man an Stelle von q-Ableitungen q-Shifts, so werden q-holonome Rekursionsgleichungen als Resultate geliefert, die man aber leicht mittels Konversionsformeln in q-holonome Differentialgleichungen überführen kann.

Vorteile von q-Shifts gegenüber q-Ableitungen:

- einfacher zu bestimmen
- $\varepsilon_q(f(x) \cdot g(x)) = \varepsilon_q f(x) \cdot \varepsilon_q g(x)$ im Gegensatz zu den Produktregeln für D_q

Algorithmen für q-holonome Funktionen

Algorithmen zur Bestimmung q-holonomer Differentialgleichungen

Koepf, Rajković und Marinković stellen in [KRM07] einige Algorithmen vor, die das Ziel haben, q-Differentialgleichungen aufzustellen.

q-Rekursionsgleichungen statt q-Differentialgleichungen

Betrachtet man an Stelle von q-Ableitungen q-Shifts, so werden q-holonome Rekursionsgleichungen als Resultate geliefert, die man aber leicht mittels Konversionsformeln in q-holonome Differentialgleichungen überführen kann.

Vorteile von q-Shifts gegenüber q-Ableitungen:

- einfacher zu bestimmen
- $\varepsilon_q(f(x)\cdot g(x)) = \varepsilon_q f(x)\cdot \varepsilon_q g(x)$ im Gegensatz zu den Produktregeln für D_q

Algorithmen für q-holonome Funktionen

Algorithmen zur Bestimmung q-holonomer Differentialgleichungen

Koepf, Rajković und Marinković stellen in [KRM07] einige Algorithmen vor, die das Ziel haben, q-Differentialgleichungen aufzustellen.

q-Rekursionsgleichungen statt q-Differentialgleichungen

Betrachtet man an Stelle von q-Ableitungen q-Shifts, so werden q-holonome Rekursionsgleichungen als Resultate geliefert, die man aber leicht mittels Konversionsformeln in q-holonome Differentialgleichungen überführen kann.

Vorteile von q-Shifts gegenüber q-Ableitungen:

- einfacher zu bestimmen
- $\varepsilon_q(f(x) \cdot g(x)) = \varepsilon_q f(x) \cdot \varepsilon_q g(x)$ im Gegensatz zu den Produktregeln für D_q

Algorithmen für q-holonome Funktionen

Algorithmen zur Bestimmung q-holonomer Differentialgleichungen

Koepf, Rajković und Marinković stellen in [KRM07] einige Algorithmen vor, die das Ziel haben, q-Differentialgleichungen aufzustellen.

q-Rekursionsgleichungen statt q-Differentialgleichungen

Betrachtet man an Stelle von q-Ableitungen q-Shifts, so werden q-holonome Rekursionsgleichungen als Resultate geliefert, die man aber leicht mittels Konversionsformeln in q-holonome Differentialgleichungen überführen kann.

Vorteile von q-Shifts gegenüber q-Ableitungen:

- einfacher zu bestimmen
- $\varepsilon_q(f(x) \cdot g(x)) = \varepsilon_q f(x) \cdot \varepsilon_q g(x)$ im Gegensatz zu den Produktregeln für D_q

q-Holonome Rekursionsgleichungen

Bestimmung einer q-holonomen Rekursion für $f(x)$ aus deren q-Shifts

Eingabe : Funktion $f(x)$ und obere Schranke MAXREORDER
Ausgabe : q-Holonome Rekursionsgleichung für $f(x)$ minimaler Ordnung

begin
  $n \leftarrow 1$
  while $n \leq MAXREORDER$ **do**
    $RE \leftarrow \varepsilon_q^{(n)} f(x) + A_{n-1}(x)\varepsilon_q^{(n-1)} f(x) + \ldots + A_0(x) f(x)$
    Zerlege RE in eine Summe linear unabhängiger Terme über $\mathbb{F}(x)$.
    if *Anzahl der linear unabhängigen Terme* $= n$ **then**
      Setze die Koeffizienten der linear unabhängigen Terme Null.
      Löse das resultierende lineare Gleichungssystem mit n Gleichungen nach $A_0(x), \ldots, A_{n-1}(x)$ über $\mathbb{F}(x)$.
      return $\varepsilon_q^{(n)} F(x) + A_{n-1}(x)\varepsilon_q^{(n-1)} F(x) + \ldots + A_0(x)F(x) = 0$
    end
    $n \leftarrow n + 1$
  end
  return *„Es existiert keine q-holonome Rekursionsgleichung mit Ordnung $\leq MAXREORDER$."*
end

q-Holonome Rekursionsgleichungen

Bestimmung einer q-holonomen Rekursionsgleichung einer verallgemeinerten q-hypergeometrischen Funktion

Die verallgemeinerte q-hypergeometrische Funktion

$$ {}_r\phi_s\left(\begin{matrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{matrix}\middle|\, q; x\right) = {}_r\phi_s\left(\begin{matrix}a_1, \ldots, a_r\\ b_1, \ldots, b_s\end{matrix}\middle|\, q; x\right) $$

erfüllt die q-holonome Rekursionsgleichung

$$ \begin{aligned} &\left((-1)^{s+1} q^{r-m} x \varepsilon_q^{(1+s-m)} \left(\prod_{i=1}^{r}(1-a_i\varepsilon_q)\right)\right.\\ &\left.+ (-1)^r(\varepsilon_q - 1)\varepsilon_q^{(r-m)} \left(\prod_{j=1}^{s}(1-q^{-1}b_j\varepsilon_q)\right)\right) {}_r\phi_s\left(\begin{matrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\end{matrix}\middle|\, q; x\right) = 0 \end{aligned} $$

der Ordnung $\max(r, s+1)$, wobei $m = \min(r, s+1)$ ist.

Der Summenalgorithmus

Bestimmung einer q-holonomen Rekursionsgleichung, die als Lösung die Summe der Lösungen zweier q-holonomer Rekursionsgleichungen besitzt

Eingabe : $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\varepsilon_q^k f(x) = 0$ der Ordnung n für $f(x)$ und
$\sum_{k=0}^{m} b_k(x)\varepsilon_q^k g(x) = 0$ der Ordnung m für $g(x)$

Ausgabe : q-Holonome Rekursionsgleichung, die gültig für die Summe $f(x) + g(x)$ ist (mit Ordnung höchstens $n + m$)

```
begin
    for i ← max(n, m) to n + m do
        RE ← Σ_{k=0}^{i} A_k(x) ε_q^k (f(x) + g(x))
        RE ← Reduziere RE mit ε_q^n f(x) → − Σ_{k=0}^{n−1} (a_k(x)/a_n(x)) ε_q^k f(x)
        RE ← Reduziere RE mit ε_q^m g(x) → − Σ_{k=0}^{m−1} (b_k(x)/b_m(x)) ε_q^k g(x)
        Setze die Koeffizienten von f(x), ..., ε_q^{n−1} f(x) und g(x), ..., ε_q^{m−1} g(x)
        von RE Null.
        Löse das resultierende lineare Gleichungssystem mit n + m Gleichungen
        nach A_0(x), ..., A_i(x) über 𝔽(x).
        if eine nichttriviale Lösung existiert then
            return Σ_{k=0}^{i} A_k(x) ε_q^k F(x) = 0
        end
    end
end
```

Der Produktalgorithmus

Bestimmung einer q-holonomen Rekursionsgleichung, die als Lösung das Produkt der Lösungen zweier q-holonomer Rekursionsgleichungen besitzt

Eingabe : $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\varepsilon_q^k f(x) = 0$ der Ordnung n für $f(x)$ und
$\sum_{k=0}^{m} b_k(x)\varepsilon_q^k g(x) = 0$ der Ordnung m für $g(x)$

Ausgabe : q-Holonome Rekursionsgleichung, die gültig für das Produkt $f(x) \cdot g(x)$ ist (mit Ordnung höchstens $n \cdot m$)

begin
  for $i \leftarrow \max(n, m)$ to $n \cdot m$ do
    $RE \leftarrow \sum_{k=0}^{i} A_k(x)\varepsilon_q^k(f(x) \cdot g(x))$
    $RE \leftarrow$ Reduziere RE mit $\varepsilon_q^n f(x) \rightarrow -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k(x)}{a_n(x)}\varepsilon_q^k f(x)$
    $RE \leftarrow$ Reduziere RE mit $\varepsilon_q^m g(x) \rightarrow -\sum_{k=0}^{m-1} \frac{b_k(x)}{b_m(x)}\varepsilon_q^k g(x)$
    Setze die Koeffizienten von $\varepsilon_q^i f(x) \cdot \varepsilon_q^j g(x)$ $(i = 0, \ldots, n-1, j = 0, \ldots, m-1)$ von RE Null.
    Löse das resultierende lineare Gleichungssystem mit $n \cdot m$ Gleichungen nach $A_0(x), \ldots, A_i(x)$ über $\mathbb{F}(x)$.
    if *eine nichttriviale Lösung existiert* then
      return $\sum_{k=0}^{i} A_k(x)\varepsilon_q^k F(x) = 0$
    end
  end
end

Der q-Petkovšek-Algorithmus

q-Normalform für rationale Funktionen

Sei $r(x) \in \mathbb{F}(x)$. Dann besitzt $r(x)$ die *q-Normalform*

$$r(x) = z\frac{\alpha(qx)}{\alpha(x)}\frac{\beta(x)}{\gamma(x)}$$

mit $z \in \mathbb{F}, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}[x]$ normiert und gewissen weiteren Eigenschaften.

Idee des q-Petkovšek-Algorithmus

Sei

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\varepsilon_q^k f(x) = 0$$

eine q-holonome Rekursionsgleichung und $r(x) \in \mathbb{F}(x)$ ein q-Zertifikat einer q-hypergeometrischen Lösung. Dann gilt für $r(x) = z\frac{\alpha(qx)}{\alpha(x)}\frac{\beta(x)}{\gamma(x)}$

$$\beta(x) \mid a_0(x) \quad \text{und} \quad \gamma(x) \mid a_n(q^{1-n}x).$$

Der q-Van-Hoeij-Algorithmus

Der Van-Hoeij-Algorithmus

In [Hoe98] entwickelte Mark Van Hoeij einen neuen Algorithmus zur Bestimmung von hypergeometrischen Lösung von holonomen Rekursionsgleichungen.

Vorteile des Van-Hoeij-Algorithmus gegenüber des einfachen Petkovšek-Algorithmus:

- Hohe Effizienz
- Unnötige Körpererweiterungen werden vermieden

Der q-Van-Hoeij-Algorithmus

Derzeitige Entwicklung einer q-Variante des Van-Hoeij-Algorithmus

Der q-Van-Hoeij-Algorithmus

Der Van-Hoeij-Algorithmus

In [Hoe98] entwickelte Mark Van Hoeij einen neuen Algorithmus zur Bestimmung von hypergeometrischen Lösung von holonomen Rekursionsgleichungen.

Vorteile des Van-Hoeij-Algorithmus gegenüber des einfachen Petkovšek-Algorithmus:

- Hohe Effizienz
- Unnötige Körpererweiterungen werden vermieden

Der q-Van-Hoeij-Algorithmus

Derzeitige Entwicklung einer q-Variante des Van-Hoeij-Algorithmus

Der q-Van-Hoeij-Algorithmus

Der Van-Hoeij-Algorithmus

In [Hoe98] entwickelte Mark Van Hoeij einen neuen Algorithmus zur Bestimmung von hypergeometrischen Lösung von holonomen Rekursionsgleichungen.

Vorteile des Van-Hoeij-Algorithmus gegenüber des einfachen Petkovšek-Algorithmus:

- Hohe Effizienz
- Unnötige Körpererweiterungen werden vermieden

Der q-Van-Hoeij-Algorithmus

Derzeitige Entwicklung einer q-Variante des Van-Hoeij-Algorithmus

Der q-Van-Hoeij-Algorithmus

Der Van-Hoeij-Algorithmus

In [Hoe98] entwickelte Mark Van Hoeij einen neuen Algorithmus zur Bestimmung von hypergeometrischen Lösung von holonomen Rekursionsgleichungen.

Vorteile des Van-Hoeij-Algorithmus gegenüber des einfachen Petkovšek-Algorithmus:

- Hohe Effizienz
- Unnötige Körpererweiterungen werden vermieden

Der q-Van-Hoeij-Algorithmus

Derzeitige Entwicklung einer q-Variante des Van-Hoeij-Algorithmus

Konversionen zwischen q-Rekursionen

Bestimmung einer q-holonomen Rekursion für die Koeffizienten einer q-hypergeometrischen Potenzreihe von $f(x)$ aus einer q-holonomen Rekursion von $f(x)$

Eingabe : Eine q-holonome Rekursion $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\varepsilon_q^k f(x) = 0$ für $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$ mit $\frac{c_{j+1}}{c_j} \in \mathbb{F}(q^j)$

Ausgabe : Eine q-holonome Rekursion $\sum_{j=0}^{m} \tilde{a}_j(q^j)c_j = 0$

begin
- Bringe die gegebene Rekursion in expandierte Form.
- Führe die formale Substitution $x^i\varepsilon_q^k f(x) \to q^{-ik}\left(q^j\right)^k c_{j-i}$ durch.
- **return** *die resultierende q-holonome Rekursion für c_j*

end

Bemerkung

Die Ordnung der q-Rekursionsgleichung für die Koeffizienten der q-Reihenentwicklung ist beschränkt durch das Maximum der Grade der Koeffizientenpolynome der betrachteten q-holonomen Rekursionsgleichung.

Konversionen zwischen q-Rekursionen

Bestimmung einer q-holonomen Rekursion für die Koeffizienten einer q-hypergeometrischen Potenzreihe von $f(x)$ aus einer q-holonomen Rekursion von $f(x)$

Eingabe : Eine q-holonome Rekursion $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\varepsilon_q^k f(x) = 0$ für $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$ mit $\frac{c_{j+1}}{c_j} \in \mathbb{F}(q^j)$

Ausgabe : Eine q-holonome Rekursion $\sum_{j=0}^{m} \tilde{a}_j(q^j)c_j = 0$

begin
- Bringe die gegebene Rekursion in expandierte Form.
- Führe die formale Substitution $x^i\varepsilon_q^k f(x) \to q^{-ik}\left(q^j\right)^k c_{j-i}$ durch.
- **return** *die resultierende q-holonome Rekursion für c_j*

end

Bemerkung

Die Ordnung der q-Rekursionsgleichung für die Koeffizienten der q-Reihenentwicklung ist beschränkt durch das Maximum der Grade der Koeffizientenpolynome der betrachteten q-holonomen Rekursionsgleichung.

Der q-FPS-Algorithmus

Der FPS-Algorithmus

Wolfram Koepf präsentierte im heutigen Hauptvortrag (bzw. in [Koe92]) einen Algorithmus, mit dem man zu einer holonomen Funktion die zugehörige formale Potenzreihe (FPS - Formal Power Series) bestimmen kann.

Bestimmung einer q-hypergeometrischen Potenzreihe für eine q-holonome Funktion

Eingabe : Eine q-holonome Funktion $f(x)$
Ausgabe : Eine q-hypergeometrische Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für $f(x)$

begin
    Bestimme eine q-holonome Rekursionsgleichung für $f(x)$.
    Konvertiere diese Rekursion in eine q-holonome Rekursion für a_k.
    Bestimme die q-hypergeometrischen Lösungen der letzten Rekursion mit dem q-Petkovšek-Algorithmus (bzw. q-Van-Hoeij).
    return *die daraus entstehende Potenzreihe*
end

Der q-FPS-Algorithmus

Der FPS-Algorithmus

Wolfram Koepf präsentierte im heutigen Hauptvortrag (bzw. in [Koe92]) einen Algorithmus, mit dem man zu einer holonomen Funktion die zugehörige formale Potenzreihe (FPS - Formal Power Series) bestimmen kann.

Bestimmung einer q-hypergeometrischen Potenzreihe für eine q-holonome Funktion

Eingabe : Eine q-holonome Funktion $f(x)$
Ausgabe : Eine q-hypergeometrische Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ für $f(x)$

begin
- Bestimme eine q-holonome Rekursionsgleichung für $f(x)$.
- Konvertiere diese Rekursion in eine q-holonome Rekursion für a_k.
- Bestimme die q-hypergeometrischen Lösungen der letzten Rekursion mit dem q-Petkovšek-Algorithmus (bzw. q-Van-Hoeij).
- **return** *die daraus entstehende Potenzreihe*

end

Maple-Package qFPS

Maple-Package qFPS

- 3000 Zeilen Code
- Elementare q-Funktionen werden bereits unterstützt
- q-Differentiation und q-Shiftberechnung
- Aufstellen von q-holonomen Differential- und Rekursionsgleichungen
- Summen-, Produkt- und Kompositionsalgorithmus für q-holonome Differential- und Rekursionsgleichungen
- q-Petkovšek-Algorithmus
- q-FPS-Algorithmus

In Arbeit . . .

- q-Orthogonale Polynome und weitere q-Funktionen
- q-Van-Hoeij-Algorithmus

Maple-Package qFPS

Maple-Package qFPS

- 3000 Zeilen Code
- Elementare q-Funktionen werden bereits unterstützt
- q-Differentiation und q-Shiftberechnung
- Aufstellen von q-holonomen Differential- und Rekursionsgleichungen
- Summen-, Produkt- und Kompositionsalgorithmus für q-holonome Differential- und Rekursionsgleichungen
- q-Petkovšek-Algorithmus
- q-FPS-Algorithmus

In Arbeit . . .

- q-Orthogonale Polynome und weitere q-Funktionen
- q-Van-Hoeij-Algorithmus

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Literaturverzeichnis

Literaturverzeichnis

[Hoe98] Mark Van Hoeij.
Finite singularities and hypergeometric solutions of linear recurrence equations.
Journal of Pure and Applied Algebra, 1998.

[Koe92] Wolfram Koepf.
Power series in computer algebra.
J. Symbolic Computation, 13:581–603, 1992.

[KRM07] Wolfram Koepf, Predrag M. Rajković, and Sladjana D. Marinković.
Functions satisfying holonomic q-differential equations.
2007.

[KS98] Roelof Koekoek and René F. Swarttouw.
The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue.
Number 98-17. Delft University of Technology, 1998.