

Algorithmen für *q*-holonome Funktionen und *q*-hypergeometrische Potenzreihen

Oberseminar Computational Mathematics

Torsten Sprenger

U N I K A S S E L
V E R S I T Ä T

04. Dezember 2007

Gliederung

- 1 Einleitung
- 2 q -Holonome Funktionen
- 3 Algorithmen für q -holonome Funktionen und Rekursionsgleichungen
- 4 Algorithmen zur Bestimmung q -hypergeometrischer Lösungen von q -holonomen Rekursionen
- 5 Algorithmen für q -hypergeometrische Potenzreihen
- 6 Maple-Package q FPS

Gliederung

- 1 Einleitung
- 2 q -Holonome Funktionen
- 3 Algorithmen für q -holonome Funktionen und Rekursionsgleichungen
- 4 Algorithmen zur Bestimmung q -hypergeometrischer Lösungen von q -holonomen Rekursionen
- 5 Algorithmen für q -hypergeometrische Potenzreihen
- 6 Maple-Package q FPS

Gliederung

- 1 Einleitung
- 2 q -Holonome Funktionen
- 3 Algorithmen für q -holonome Funktionen und Rekursionsgleichungen
- 4 Algorithmen zur Bestimmung q -hypergeometrischer Lösungen von q -holonomen Rekursionen
- 5 Algorithmen für q -hypergeometrische Potenzreihen
- 6 Maple-Package q FPS

Gliederung

- 1 Einleitung
- 2 q -Holonome Funktionen
- 3 Algorithmen für q -holonome Funktionen und Rekursionsgleichungen
- 4 Algorithmen zur Bestimmung q -hypergeometrischer Lösungen von q -holonomen Rekursionen
- 5 Algorithmen für q -hypergeometrische Potenzreihen
- 6 Maple-Package q FPS

Gliederung

- 1 Einleitung
- 2 q -Holonome Funktionen
- 3 Algorithmen für q -holonome Funktionen und Rekursionsgleichungen
- 4 Algorithmen zur Bestimmung q -hypergeometrischer Lösungen von q -holonomen Rekursionen
- 5 Algorithmen für q -hypergeometrische Potenzreihen
- 6 Maple-Package q FPS

Gliederung

- 1 Einleitung
- 2 q -Holonome Funktionen
- 3 Algorithmen für q -holonome Funktionen und Rekursionsgleichungen
- 4 Algorithmen zur Bestimmung q -hypergeometrischer Lösungen von q -holonomen Rekursionen
- 5 Algorithmen für q -hypergeometrische Potenzreihen
- 6 Maple-Package q FPS

Motivation zur q -Analysis

Analysis

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$D_h f(x) = \frac{\Delta_h f(x)}{\Delta_h x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} D_h f(x)$$

q -Analysis

$$\Delta_q f(x) = f(x) - f(qx)$$

$$D_q f(x) = \frac{\Delta_q f(x)}{\Delta_q x} = \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}$$

$$f'(x) = \lim_{q \rightarrow 1} D_q f(x)$$

Gitter



Motivation zur q -Analysis

Analysis

$$\Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x)$$

$$D_h f(x) = \frac{\Delta_h f(x)}{\Delta_h x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} D_h f(x)$$

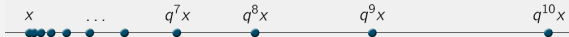
q -Analysis

$$\Delta_q f(x) = f(x) - f(qx)$$

$$D_q f(x) = \frac{\Delta_q f(x)}{\Delta_q x} = \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}$$

$$f'(x) = \lim_{q \rightarrow 1} D_q f(x)$$

Gitter



Notation

Generalvoraussetzungen

- q : Unbestimmte
- \mathbb{K} : Körper der Charakteristik 0
- $\mathbb{F} = \mathbb{K}(q)$

q -Operatoren

- q -Shiftoperator ε_q

$$\varepsilon_q f(x) := f(qx)$$

- q -Differential- bzw. Hahnoperator D_q

$$D_q f(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}, & x \neq 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} D_q f(t), & x = 0 \end{cases}$$

$D_q f(x)$ nennt man q -Ableitung von $f(x)$.

Notation

Generalvoraussetzungen

- q : Unbestimmte
- \mathbb{K} : Körper der Charakteristik 0
- $\mathbb{F} = \mathbb{K}(q)$

q -Operatoren

- q -Shiftoperator ε_q

$$\varepsilon_q f(x) := f(qx)$$

- q -Differential- bzw. Hahnoperator D_q

$$D_q f(x) := \begin{cases} \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}, & x \neq 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} D_q f(t), & x = 0 \end{cases}$$

$D_q f(x)$ nennt man q -Ableitung von $f(x)$.

Elementare Definitionen

q-Hypergeometrische Terme

Einen Term $f(x)$ nennt man *q-hypergeometrisch*, wenn

$$\frac{\varepsilon_q f(x)}{f(x)} = \frac{f(qx)}{f(x)} = r(x) \in \mathbb{F}(x)$$

gilt. Die Funktion $r(x)$ nennt man *q-Zertifikat* von $f(x)$.

q-Hypergeometrische Potenzreihen

Eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ nennt man *q-hypergeometrisch*, wenn der Koeffizient a_k *q-hypergeometrisch* ist, d.h. wenn

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \in \mathbb{F}(q^k)$$

gilt.

Elementare Definitionen

q-Hypergeometrische Terme

Einen Term $f(x)$ nennt man *q-hypergeometrisch*, wenn

$$\frac{\varepsilon_q f(x)}{f(x)} = \frac{f(qx)}{f(x)} = r(x) \in \mathbb{F}(x)$$

gilt. Die Funktion $r(x)$ nennt man *q-Zertifikat* von $f(x)$.

q-Hypergeometrische Potenzreihen

Eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ nennt man *q-hypergeometrisch*, wenn der Koeffizient a_k *q-hypergeometrisch* ist, d.h. wenn

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \in \mathbb{F}(q^k)$$

gilt.

q-Funktionen

Einfache & spezielle q-Funktionen

- q-basische Zahl: $[n]_q := \frac{1-q^n}{1-q}, \quad n \in \mathbb{Z}$

- q-Fakultät: $[n]_q! := \begin{cases} [n]_q \cdot [n-1]_q \cdot \dots \cdot [1]_q, & n \in \mathbb{N} \\ 1, & n = 0 \end{cases}$

- q-Pochhammersymbol:

$$(a; q)_k := \begin{cases} (1-a) \cdot (1-aq) \cdot \dots \cdot (1-aq^{k-1}), & k \in \mathbb{N} \\ 1, & k = 0 \\ \frac{1}{(1-aq^{-1}) \cdot (1-aq^{-2}) \cdot \dots \cdot (1-aq^k)}, & k \in -\mathbb{N} \end{cases}$$

- q-Binomialkoeffizient: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}}, \quad n, k \in \mathbb{N}_0$

q-Funktionen

Einfache & spezielle q-Funktionen

- q-basische Zahl: $[n]_q := \frac{1-q^n}{1-q}$, $n \in \mathbb{Z}$

- q-Fakultät: $[n]_q! := \begin{cases} [n]_q \cdot [n-1]_q \cdot \dots \cdot [1]_q, & n \in \mathbb{N} \\ 1, & n = 0 \end{cases}$

- q-Pochhammersymbol:

$$(a; q)_k := \begin{cases} (1-a) \cdot (1-aq) \cdot \dots \cdot (1-aq^{k-1}), & k \in \mathbb{N} \\ 1, & k = 0 \\ \frac{1}{(1-aq^{-1}) \cdot (1-aq^{-2}) \cdot \dots \cdot (1-aq^k)}, & k \in -\mathbb{N} \end{cases}$$

- q-Binomialkoeffizient: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}}$, $n, k \in \mathbb{N}_0$

q-Funktionen

Einfache & spezielle q-Funktionen

- q-basische Zahl: $[n]_q := \frac{1-q^n}{1-q}$, $n \in \mathbb{Z}$

- q-Fakultät: $[n]_q! := \begin{cases} [n]_q \cdot [n-1]_q \cdot \dots \cdot [1]_q, & n \in \mathbb{N} \\ 1, & n = 0 \end{cases}$

- q-Pochhammersymbol:

$$(a; q)_k := \begin{cases} (1-a) \cdot (1-aq) \cdot \dots \cdot (1-aq^{k-1}), & k \in \mathbb{N} \\ 1, & k = 0 \\ \frac{1}{(1-aq^{-1}) \cdot (1-aq^{-2}) \cdot \dots \cdot (1-aq^k)}, & k \in -\mathbb{N} \end{cases}$$

- q-Binomialkoeffizient: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}}$, $n, k \in \mathbb{N}_0$

q-Funktionen

Einfache & spezielle q-Funktionen

- q-basische Zahl: $[n]_q := \frac{1-q^n}{1-q}, \quad n \in \mathbb{Z}$

- q-Fakultät: $[n]_q! := \begin{cases} [n]_q \cdot [n-1]_q \cdot \dots \cdot [1]_q, & n \in \mathbb{N} \\ 1, & n = 0 \end{cases}$

- q-Pochhammersymbol:

$$(a; q)_k := \begin{cases} (1-a) \cdot (1-aq) \cdot \dots \cdot (1-aq^{k-1}), & k \in \mathbb{N} \\ 1, & k = 0 \\ \frac{1}{(1-aq^{-1}) \cdot (1-aq^{-2}) \cdot \dots \cdot (1-aq^k)}, & k \in -\mathbb{N} \end{cases}$$

- q-Binomialkoeffizient: $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}}, \quad n, k \in \mathbb{N}_0$

q -Funktionen

Verallgemeinerte q -hypergeometrische Funktion

Verallgemeinerte q -hypergeometrische Funktion:

$${}_r\phi_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} \middle| q; x \right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1; q)_k \cdots (a_r; q)_k}{(b_1; q)_k \cdots (b_s; q)_k} \frac{x^k}{(q; q)_k} \left((-1)^k q^{\binom{k}{2}} \right)^{1+s-r}$$

q -Exponentialfunktionen (Askey-Scheme [KS98])

- kleine q -Exponentialfunktion:

$$\exp_q(x) := {}_1\phi_0 \left(\begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix} \middle| q; x \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(q; q)_k} x^k$$

- große q -Exponentialfunktion:

$$\text{Exp}_q(x) := {}_0\phi_0 \left(\begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \middle| q; -x \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\binom{k}{2}}}{(q; q)_k} x^k$$

q-Funktionen

Verallgemeinerte q-hypergeometrische Funktion

Verallgemeinerte q-hypergeometrische Funktion:

$${}_r\phi_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} \middle| q; x \right) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1; q)_k \cdots (a_r; q)_k}{(b_1; q)_k \cdots (b_s; q)_k} \frac{x^k}{(q; q)_k} \left((-1)^k q^{\binom{k}{2}} \right)^{1+s-r}$$

q-Exponentialfunktionen (Askey-Scheme [KS98])

- kleine q-Exponentialfunktion:

$$\exp_q(x) := {}_1\phi_0 \left(\begin{matrix} 0 \\ - \end{matrix} \middle| q; x \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(q; q)_k} x^k$$

- große q-Exponentialfunktion:

$$\text{Exp}_q(x) := {}_0\phi_0 \left(\begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \middle| q; -x \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{\binom{k}{2}}}{(q; q)_k} x^k$$

q-Funktionen

q-Trigonometrische Funktionen (Askey-Scheme [KS98])

- kleine q-Sinusfunktion:

$$\sin_q(x) := \frac{\exp_q(ix) - \exp_q(-ix)}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(q; q)_{2k+1}} x^{2k+1}$$

- große q-Sinusfunktion:

$$\text{Sin}_q(x) := \frac{\text{Exp}_q(ix) - \text{Exp}_q(-ix)}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k(2k+1)}}{(q; q)_{2k+1}} x^{2k+1}$$

- kleine q-Cosinusfunktion:

$$\cos_q(x) := \frac{\exp_q(ix) + \exp_q(-ix)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(q; q)_{2k}} x^{2k}$$

- große q-Cosinusfunktion:

$$\text{Cos}_q(x) := \frac{\text{Exp}_q(ix) + \text{Exp}_q(-ix)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k(2k-1)}}{(q; q)_{2k}} x^{2k}$$

q-Funktionen

q-Trigonometrische Funktionen (Askey-Scheme [KS98])

- kleine q-Sinusfunktion:

$$\sin_q(x) := \frac{\exp_q(ix) - \exp_q(-ix)}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(q;q)_{2k+1}} x^{2k+1}$$

- große q-Sinusfunktion:

$$\text{Sin}_q(x) := \frac{\text{Exp}_q(ix) - \text{Exp}_q(-ix)}{2i} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k(2k+1)}}{(q;q)_{2k+1}} x^{2k+1}$$

- kleine q-Cosinusfunktion:

$$\cos_q(x) := \frac{\exp_q(ix) + \exp_q(-ix)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(q;q)_{2k}} x^{2k}$$

- große q-Cosinusfunktion:

$$\text{Cos}_q(x) := \frac{\text{Exp}_q(ix) + \text{Exp}_q(-ix)}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{k(2k-1)}}{(q;q)_{2k}} x^{2k}$$

q-Funktionen

Klassische *q*-orthogonale Polynome

Die *klassischen q-orthogonalen Polynome* sind definiert als *q*-polynomiale Lösungen

$$P_n(x) = k_n x^n + k'_n x^{n-1} + k''_n x^{n-2} + \dots \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

der Gleichung

$$\sigma(x) D_q D_{q^{-1}} P_n(x) + \tau(x) D_q P_n(x) + \lambda_{n,q} P_n(x) = 0$$

mit

$$\sigma(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{und} \quad \tau(x) = dx + e$$

mit $a, b, c, d, e, \lambda_{n,q}, k_n, k'_n, k''_n \in \mathbb{F}$ und $d \neq 0$.

q-Funktionen

Klassische q-orthogonale Polynome (Askey-Scheme [KS98])

- kleine q-Laguerre-Polynome:

$$p_n(x; a|q) := {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q^{-n}, 0 \\ aq \end{matrix} \middle| q; qx\right)$$

- kleine q-Jacobi-Polynome:

$$p_n(x; a, b|q) := {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q^{-n}, abq^{n+1} \\ aq \end{matrix} \middle| q; qx\right)$$

- kleine q-Legendre-Polynome:

$$p_n(x|q) := {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q^{-n}, q^{n+1} \\ q \end{matrix} \middle| q; qx\right)$$

- alternative Charlier-Polynome:

$$K_n(x; a; q) := {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q^{-n}, -aq^n \\ 0 \end{matrix} \middle| q; qx\right)$$

- Stieltjes-Wigert-Polynome:

$$S_n(x; q) := \frac{1}{(q; q)_n} {}_1\phi_1\left(\begin{matrix} q^{-n} \\ 0 \end{matrix} \middle| q; -q^{n+1}x\right)$$

q-Funktionen

Klassische q-orthogonale Polynome (Askey-Scheme [KS98])

- große q-Laguerre-Polynome:

$$P_n(x; a, b; q) := {}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} q^{-n}, 0, x \\ aq, bq \end{matrix} \middle| q; q \right)$$

- große q-Jacobi-Polynome:

$$P_n(x; a, b, c; q) := {}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} q^{-n}, abq^{n+1}, x \\ aq, cq \end{matrix} \middle| q; q \right)$$

- große q-Legendre-Polynome:

$$P_n(x; c; q) := {}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} q^{-n}, q^{n+1}, x \\ q, cq \end{matrix} \middle| q; q \right)$$

- Al-Salam-Carlitz II-Polynome:

$$V_n^{(a)}(x; q) := (-a)^n q^{-\binom{n}{2}} {}_2\phi_0 \left(\begin{matrix} q^{-n}, x \\ - \end{matrix} \middle| q; \frac{q^n}{a} \right)$$

- q-Meixner-Polynome:

$$M_n(\bar{x}; b, c; q) := {}_2\phi_1 \left(\begin{matrix} q^{-n}, \bar{x} \\ bq \end{matrix} \middle| q; -\frac{q^{n+1}}{c} \right) \quad \text{mit} \quad \bar{x} = q^{-x}$$

q-Ableitungen und q-Shifts

Beispiele von q-Ableitungen und q-Shifts

- Potenzen:

$$D_q x^k = [k]_q x^{k-1} \quad \text{und} \quad \varepsilon_q x^k = q^k x^k$$

- q-Pochhammersymbol:

$$D_q (x; q)_k = \frac{[k]_q}{x-1} (x; q)_k \quad \text{und} \quad \varepsilon_q (x; q)_k = \frac{1-xq^k}{1-x} (x; q)_k$$

- kleine q-Exponentialfunktion:

$$D_q \exp_q(x) = \frac{1}{1-q} \exp_q(x) \quad \text{und} \quad \varepsilon_q \exp_q(x) = (1-x) \exp_q(x)$$

q-Ableitungen und q-Shifts

Beispiele von q-Ableitungen und q-Shifts

- Potenzen:

$$D_q x^k = [k]_q x^{k-1} \quad \text{und} \quad \varepsilon_q x^k = q^k x^k$$

- q-Pochhammersymbol:

$$D_q (x; q)_k = \frac{[k]_q}{x-1} (x; q)_k \quad \text{und} \quad \varepsilon_q (x; q)_k = \frac{1-xq^k}{1-x} (x; q)_k$$

- kleine q-Exponentialfunktion:

$$D_q \exp_q(x) = \frac{1}{1-q} \exp_q(x) \quad \text{und} \quad \varepsilon_q \exp_q(x) = (1-x) \exp_q(x)$$

q-Ableitungen und *q*-Shifts

Beispiele von *q*-Ableitungen und *q*-Shifts

- Potenzen:

$$D_q x^k = [k]_q x^{k-1} \quad \text{und} \quad \varepsilon_q x^k = q^k x^k$$

- *q*-Pochhammersymbol:

$$D_q (x; q)_k = \frac{[k]_q}{x-1} (x; q)_k \quad \text{und} \quad \varepsilon_q (x; q)_k = \frac{1-xq^k}{1-x} (x; q)_k$$

- kleine *q*-Exponentialfunktion:

$$D_q \exp_q(x) = \frac{1}{1-q} \exp_q(x) \quad \text{und} \quad \varepsilon_q \exp_q(x) = (1-x) \exp_q(x)$$

q -Ableitungen und q -Shifts

Drei-Term-Rekursion für klassische q -orthogonale Polynome

Es ist wohlbekannt, dass die klassischen q -orthogonalen Polynome $P_n(x)$ die Drei-Term-Rekursion

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x)$$

mit $A_n, B_n, C_n \in \mathbb{F}$ erfüllen.

Strukturformel für klassische q -orthogonale Polynome

Für die klassischen q -orthogonalen Polynome $P_n(x)$ gilt die Strukturformel ([KS01])

$$\sigma(x)D_{q^{-1}}P_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x)$$

mit $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{F}$.

Konversionen zwischen q -Operatoren

Konversionsformeln

Es existieren folgende Zusammenhänge zwischen höheren q -Ableitungen und höheren q -Shifts

$$\varepsilon_q^{(n)} f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k (1-q)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}} x^k D_q^{(k)} f(x)$$

$$D_q^{(n)} f(x) = \frac{1}{(1-q)^n x^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2} - (n-1)k} \varepsilon_q^{(k)} f(x).$$

q-Holomome Differentialgleichungen und Rekursionen

q-Holomome Differentialgleichung

Unter einer *q-holomonen Differentialgleichung* für eine Funktion $f(x)$ versteht man eine Gleichung der Form

$$\sum_{k=0}^n a_k(x) D_q^{(k)} f(x) = 0,$$

die linear und homogen ist und Koeffizienten $a_k(x)$ aus $\mathbb{F}[x]$ hat.

q-Holomome Rekursionsgleichung

Unter einer *q-holomonen Rekursionsgleichung* für eine Funktion $f(x)$ versteht man eine Gleichung der Form

$$\sum_{k=0}^n a_k(x) \varepsilon_q^{(k)} f(x) = 0,$$

die linear und homogen ist und Koeffizienten $a_k(x)$ aus $\mathbb{F}[x]$ hat.

q-Holomome Differentialgleichungen und Rekursionen

q-Holomome Differentialgleichung

Unter einer *q-holomonen Differentialgleichung* für eine Funktion $f(x)$ versteht man eine Gleichung der Form

$$\sum_{k=0}^n a_k(x) D_q^{(k)} f(x) = 0,$$

die linear und homogen ist und Koeffizienten $a_k(x)$ aus $\mathbb{F}[x]$ hat.

q-Holomome Rekursionsgleichung

Unter einer *q-holomonen Rekursionsgleichung* für eine Funktion $f(x)$ versteht man eine Gleichung der Form

$$\sum_{k=0}^n a_k(x) \varepsilon_q^{(k)} f(x) = 0,$$

die linear und homogen ist und Koeffizienten $a_k(x)$ aus $\mathbb{F}[x]$ hat.

q-Holomome Funktionen

q-Holomome Funktionen

Wir nennen $f(x)$ eine *q-holomome Funktion*, wenn sie eine *q-holomome Differentialgleichung* (bzw. Rekursionsgleichung) erfüllt.

Beispiele q-holomomer Funktionen

| $f(x)$ | q-Differentialgleichung für $f(x)$ (linke Seite) |
|-------------------|--|
| x^k | $(q-1)x D_q f(x) + (1-q^k)f(x)$ |
| $(x; q)_k$ | $(q-1)(x-1) D_q f(x) + (1-q^k)f(x)$ |
| $\exp_q(x)$ | $(q-1) D_q f(x) + f(x)$ |
| $\text{Exp}_q(x)$ | $(q-1)(x+1) D_q f(x) + f(x)$ |
| $\sin_q(x)$ | $(q-1)^2 D_q^2 f(x) + f(x)$ |
| $\text{Sin}_q(x)$ | $(q-1)^2(1+x^2q^2) D_q^2 f(x) + qx(q-1)(q+1) D_q f(x) + qf(x)$ |
| $\cos_q(x)$ | $(q-1)^2 D_q^2 f(x) + f(x)$ |
| $\text{Cos}_q(x)$ | $(q-1)^2(1+x^2q^2) D_q^2 f(x) + qx(q-1)(q+1) D_q f(x) + qf(x)$ |

q-Holonyme Funktionen

q-Holonyme Funktionen

Wir nennen $f(x)$ eine *q-holonyme Funktion*, wenn sie eine q-holonyme Differentialgleichung (bzw. Rekursionsgleichung) erfüllt.

Beispiele q-holonomer Funktionen

| $f(x)$ | q-Differentialgleichung für $f(x)$ (linke Seite) |
|-------------------|---|
| x^k | $(q - 1)x D_q f(x) + (1 - q^k) f(x)$ |
| $(x; q)_k$ | $(q - 1)(x - 1) D_q f(x) + (1 - q^k) f(x)$ |
| $\exp_q(x)$ | $(q - 1) D_q f(x) + f(x)$ |
| $\text{Exp}_q(x)$ | $(q - 1)(x + 1) D_q f(x) + f(x)$ |
| $\sin_q(x)$ | $(q - 1)^2 D_q^2 f(x) + f(x)$ |
| $\text{Sin}_q(x)$ | $(q - 1)^2(1 + x^2 q^2) D_q^2 f(x) + qx(q - 1)(q + 1) D_q f(x) + qf(x)$ |
| $\cos_q(x)$ | $(q - 1)^2 D_q^2 f(x) + f(x)$ |
| $\text{Cos}_q(x)$ | $(q - 1)^2(1 + x^2 q^2) D_q^2 f(x) + qx(q - 1)(q + 1) D_q f(x) + qf(x)$ |

Algorithmen für *q*-holonome Funktionen

Algorithmen zur Bestimmung *q*-holonomer Differentialgleichungen

Koepf, Rajković und Marinković stellen in [KRM07] einige Algorithmen vor, die das Ziel haben, *q*-Differentialgleichungen aufzustellen.

q-Rekursionsgleichungen statt *q*-Differentialgleichungen

Betrachtet man an Stelle von *q*-Ableitungen *q*-Shifts, so werden *q*-holonome Rekursionsgleichungen als Resultate geliefert, die man aber leicht mittels Konversionsformeln in *q*-holonome Differentialgleichungen überführen kann.

Vorteile von *q*-Shifts gegenüber *q*-Ableitungen:

- einfacher zu bestimmen
- $\varepsilon_q(f(x) \cdot g(x)) = \varepsilon_q f(x) \cdot \varepsilon_q g(x)$ im Gegensatz zu den Produktregeln für D_q

Algorithmen für q -holonome Funktionen

Algorithmen zur Bestimmung q -holonomer Differentialgleichungen

Koepf, Rajković und Marinković stellen in [KRM07] einige Algorithmen vor, die das Ziel haben, q -Differentialgleichungen aufzustellen.

q -Rekursionsgleichungen statt q -Differentialgleichungen

Betrachtet man an Stelle von q -Ableitungen q -Shifts, so werden q -holonome Rekursionsgleichungen als Resultate geliefert, die man aber leicht mittels Konversionsformeln in q -holonome Differentialgleichungen überführen kann.

Vorteile von q -Shifts gegenüber q -Ableitungen:

- einfacher zu bestimmen
- $\varepsilon_q(f(x) \cdot g(x)) = \varepsilon_q f(x) \cdot \varepsilon_q g(x)$ im Gegensatz zu den Produktregeln für D_q

Algorithmen für *q*-holonome Funktionen

Algorithmen zur Bestimmung *q*-holonomer Differentialgleichungen

Koepl, Rajković und Marinković stellen in [KRM07] einige Algorithmen vor, die das Ziel haben, *q*-Differentialgleichungen aufzustellen.

q-Rekursionsgleichungen statt *q*-Differentialgleichungen

Betrachtet man an Stelle von *q*-Ableitungen *q*-Shifts, so werden *q*-holonome Rekursionsgleichungen als Resultate geliefert, die man aber leicht mittels Konversionsformeln in *q*-holonome Differentialgleichungen überführen kann.

Vorteile von *q*-Shifts gegenüber *q*-Ableitungen:

- einfacher zu bestimmen
- $\varepsilon_q(f(x) \cdot g(x)) = \varepsilon_q f(x) \cdot \varepsilon_q g(x)$ im Gegensatz zu den Produktregeln für D_q

Algorithmen für *q*-holonome Funktionen

Algorithmen zur Bestimmung *q*-holonomer Differentialgleichungen

Koepf, Rajković und Marinković stellen in [KRM07] einige Algorithmen vor, die das Ziel haben, *q*-Differentialgleichungen aufzustellen.

q-Rekursionsgleichungen statt *q*-Differentialgleichungen

Betrachtet man an Stelle von *q*-Ableitungen *q*-Shifts, so werden *q*-holonome Rekursionsgleichungen als Resultate geliefert, die man aber leicht mittels Konversionsformeln in *q*-holonome Differentialgleichungen überführen kann.

Vorteile von *q*-Shifts gegenüber *q*-Ableitungen:

- einfacher zu bestimmen
- $\varepsilon_q(f(x) \cdot g(x)) = \varepsilon_q f(x) \cdot \varepsilon_q g(x)$ im Gegensatz zu den Produktregeln für D_q

q-Holomome Rekursionsgleichungen

Bestimmung einer q-holomonen Rekursion für $f(x)$ aus deren q-Shifts

Eingabe : Funktion $f(x)$ und obere Schranke MAXREORDER

Ausgabe : q-Holomome Rekursionsgleichung für $f(x)$ minimaler Ordnung

```
1 begin
2   n ← 1
3   while n ≤ MAXREORDER do
4     RE ←  $\varepsilon_q^{(n)} f(x) + A_{n-1}(x) \varepsilon_q^{(n-1)} f(x) + \dots + A_0(x) f(x)$ 
5     Zerlege RE in eine Summe linear unabhängiger Terme über  $\mathbb{F}(x)$ .
6     if Anzahl der linear unabhängigen Terme = n then
7       Setze die Koeffizienten der linear unabhängigen Terme Null.
8       Löse das resultierende lineare Gleichungssystem mit n
9       Gleichungen nach  $A_0(x), \dots, A_{n-1}(x)$  über  $\mathbb{F}(x)$ .
10      return  $\varepsilon_q^{(n)} F(x) + A_{n-1}(x) \varepsilon_q^{(n-1)} F(x) + \dots + A_0(x) F(x) = 0$ 
11    end
12    n ← n + 1
13  end
14 return „Es existiert keine q-holomome Rekursionsgleichung mit Ordnung
    ≤ MAXREORDER.“
```

q-Holonome Rekursionsgleichungen

Bestimmung einer *q*-holonomen Rekursionsgleichung einer verallgemeinerten *q*-hypergeometrischen Funktion

Die verallgemeinerte *q*-hypergeometrische Funktion

$${}_r\phi_s \left(\begin{matrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{matrix} \middle| q; x \right) = {}_r\phi_s \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} \middle| q; x \right)$$

erfüllt die *q*-holonome Rekursionsgleichung

$$\left((-1)^{s+1} q^{r-m} x \varepsilon_q^{(1+s-m)} \left(\prod_{i=1}^r (1 - a_i \varepsilon_q) \right) + (-1)^r (\varepsilon_q - 1) \varepsilon_q^{(r-m)} \left(\prod_{j=1}^s (1 - q^{-1} b_j \varepsilon_q) \right) \right) {}_r\phi_s \left(\begin{matrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{matrix} \middle| q; x \right) = 0$$

der Ordnung $\max(r, s + 1)$, wobei $m = \min(r, s + 1)$ ist.

Der Summenalgorithmus

Bestimmung einer q -holonomen Rekursionsgleichung, die als Lösung die Summe der Lösungen zweier q -holonomer Rekursionsgleichungen besitzt

Eingabe : $\sum_{k=0}^n a_k(x) \varepsilon_q^k f(x) = 0$ der Ordnung n für $f(x)$ und
 $\sum_{k=0}^m b_k(x) \varepsilon_q^k g(x) = 0$ der Ordnung m für $g(x)$

Ausgabe : q -Holonome Rekursionsgleichung, die gültig für die Summe $f(x) + g(x)$
 ist (mit Ordnung höchstens $n + m$)

```

1 begin
2   for  $i \leftarrow \max(n, m)$  to  $n + m$  do
3      $RE \leftarrow \sum_{k=0}^i A_k(x) \varepsilon_q^k (f(x) + g(x))$ 
4      $RE \leftarrow$  Reduziere  $RE$  mit  $\varepsilon_q^n f(x) \rightarrow -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k(x)}{a_n(x)} \varepsilon_q^k f(x)$ 
5      $RE \leftarrow$  Reduziere  $RE$  mit  $\varepsilon_q^m g(x) \rightarrow -\sum_{k=0}^{m-1} \frac{b_k(x)}{b_m(x)} \varepsilon_q^k g(x)$ 
6     Setze die Koeffizienten von  $f(x), \dots, \varepsilon_q^{n-1} f(x)$  und  $g(x), \dots, \varepsilon_q^{m-1} g(x)$ 
       von  $RE$  Null.
7     Löse das resultierende lineare Gleichungssystem mit  $n + m$  Gleichungen
       nach  $A_0(x), \dots, A_i(x)$  über  $\mathbb{F}(x)$ .
8     if eine nichttriviale Lösung existiert then
9       | return  $\sum_{k=0}^i A_k(x) \varepsilon_q^k F(x) = 0$ 
10    end
11  end
12 end
```

Der Produktalgorithmus

Bestimmung einer q -holomonen Rekursionsgleichung, die als Lösung das Produkt der Lösungen zweier q -holonomer Rekursionsgleichungen besitzt

Eingabe : $\sum_{k=0}^n a_k(x) \varepsilon_q^k f(x) = 0$ der Ordnung n für $f(x)$ und
 $\sum_{k=0}^m b_k(x) \varepsilon_q^k g(x) = 0$ der Ordnung m für $g(x)$

Ausgabe : q -Holomome Rekursionsgleichung, die gültig für das Produkt $f(x) \cdot g(x)$ ist
 (mit Ordnung höchstens $n \cdot m$)

```

1 begin
2   for  $i \leftarrow \max(n, m)$  to  $n \cdot m$  do
3      $RE \leftarrow \sum_{k=0}^i A_k(x) \varepsilon_q^k (f(x) \cdot g(x))$ 
4      $RE \leftarrow$  Reduziere  $RE$  mit  $\varepsilon_q^n f(x) \rightarrow -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k(x)}{a_n(x)} \varepsilon_q^k f(x)$ 
5      $RE \leftarrow$  Reduziere  $RE$  mit  $\varepsilon_q^m g(x) \rightarrow -\sum_{k=0}^{m-1} \frac{b_k(x)}{b_m(x)} \varepsilon_q^k g(x)$ 
6     Setze die Koeffizienten von  $\varepsilon_q^i f(x) \cdot \varepsilon_q^j g(x)$ 
       ( $i = 0, \dots, n-1, j = 0, \dots, m-1$ ) von  $RE$  Null.
7     Löse das resultierende lineare Gleichungssystem mit  $n \cdot m$  Gleichungen
       nach  $A_0(x), \dots, A_i(x)$  über  $\mathbb{F}(x)$ .
8     if eine nichttriviale Lösung existiert then
9       | return  $\sum_{k=0}^i A_k(x) \varepsilon_q^k F(x) = 0$ 
10    end
11  end
12 end
  
```

Der Kompositionsalgorithmus

Bestimmung einer q -holonomen Rekursionsgleichung, die als Lösung die Komposition einer Lösung einer q -holonomen Rekursionsgleichung mit einer Funktion $g(x)$ mit $g(qx) = q^b g(x)$ besitzt

Eingabe : $\sum_{k=0}^n a_k(x) \varepsilon_q^k f(x) = 0$ der Ordnung n und $g(x)$ mit $g(qx) = q^b g(x)$ für ein $b \in \mathbb{N}$

Ausgabe : q -Holonome Rekursionsgleichung, die gültig für die Verkettung $(f \circ g)(x)$ ist (mit Ordnung n)

```

1 begin
2   RE ←  $\sum_{k=0}^n A_k(t) \varepsilon_q^{bk} f(t)$ 
3   RE ← Reduziere RE mit  $\varepsilon_q^n f(t) \rightarrow -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k(t)}{a_n(t)} \varepsilon_q^k f(t)$ 
4   Setze die Koeffizienten von  $f(t), \dots, \varepsilon_q^{n-1} f(t)$  von RE Null.
5   Löse das resultierende lineare Gleichungssystem mit  $n$  Gleichungen nach
    $A_0(t), \dots, A_n(t)$  über  $\mathbb{F}(t)$ .
6   Substituiere  $t \rightarrow g(x)$  in den Lösungen  $A_k(t)$  und bilde somit die Lösungen
    $\tilde{A}_k(x) = A_k(t)$  mit  $k = 0, \dots, n$ .
7   return  $\sum_{k=0}^n \tilde{A}_k(x) \varepsilon_q^k F(x) = 0$ 
8 end

```

q-Polynomiale Lsungen von q-holonomen Rekursionen

q-Polynomiale Lsungen von q-holonomen Rekursionsgleichungen

Eingabe : Eine q-holnomet Rekursion $\sum_{k=0}^n a_k(x) \varepsilon_q^k f(x) = 0$

Ausgabe : Alle q-polynomialen Lsungen $f(x)$ der q-holonomen Rekursion

```
1 begin
2   N ← obere Gradschranke aller m3glichen q-polynomialen Lsungen
3   if N < 0 then
4     | return „Es existiert keine q-polynomiale Lsung.“
5   end
6   f(x) ←  $\sum_{j=0}^N \beta_j x^j$ 
7   Setze f(x) in die q-holnomet Rekursionsgleichung ein.
8   Betrachte die linke Seite der Gleichung als Polynom in x.
9   L3se das durch Koeffizientenvergleich erhaltene lineare Gleichungssystem
   in den Unbekannten  $\beta_j$  (j = 0, ..., N) 3ber  $\mathbb{F}$ .
10  if eine nichttriviale Lsung existiert then
11    | return f(x)
12  else
13    | return „Es existiert keine q-polynomiale Lsung.“
14  end
15 end
```

q-Rationale Lösungen von *q*-holonomen Rekursionen

q-Dispersionsmenge zweier *q*-Polynome

Die *q*-Dispersionsmenge zweier *q*-Polynome $p \in \mathbb{F}[x]$ und $r \in \mathbb{F}[x]$ ist definiert als

$$\text{Disp}_q(p(x), r(x)) := \{j \in \mathbb{N}_0 \mid \gcd(p(x), \varepsilon_q^j r(x)) \neq 1\}.$$

Mit der *q*-Dispersion von $p(x)$ und $r(x)$ bezeichnen wir die Zahl

$$\text{disp}_q(p(x), r(x)) := \max \text{Disp}_q(p(x), r(x)).$$

Nennerschanke einer *q*-rationalen Funktion

Eine *Nennerschanke* einer *q*-rationalen Funktion $r(x) \in \mathbb{F}(x)$ ist ein *q*-Polynom $v(x) \in \mathbb{F}[x]$, so dass

$$r(x)v(x) \in \mathbb{F}[x]$$

gilt.

q-Rationale Lösungen von *q*-holonomen Rekursionen

q-Dispersionsmenge zweier *q*-Polynome

Die *q*-Dispersionsmenge zweier *q*-Polynome $p \in \mathbb{F}[x]$ und $r \in \mathbb{F}[x]$ ist definiert als

$$\text{Disp}_q(p(x), r(x)) := \{j \in \mathbb{N}_0 \mid \gcd(p(x), \varepsilon_q^j r(x)) \neq 1\}.$$

Mit der *q*-Dispersion von $p(x)$ und $r(x)$ bezeichnen wir die Zahl

$$\text{disp}_q(p(x), r(x)) := \max \text{Disp}_q(p(x), r(x)).$$

Nennerschanke einer *q*-rationalen Funktion

Eine *Nennerschanke* einer *q*-rationalen Funktion $r(x) \in \mathbb{F}(x)$ ist ein *q*-Polynom $v(x) \in \mathbb{F}[x]$, so dass

$$r(x)v(x) \in \mathbb{F}[x]$$

gilt.

q-Rationale Lösungen von *q*-holonomen Rekursionen

Nennerschranke von *q*-rationalen Lösungen von Abramov

Für eine *q*-rationale Lösung $r(x)$ der *q*-holonomen Rekursion

$$\sum_{k=0}^n a_k(x) \varepsilon_q^k f(x) = 0$$

ist

$$v(x) := \gcd \left(\prod_{i=0}^N \varepsilon_q^{-(n+i)} a_n(x), \prod_{i=0}^N \varepsilon_q^i a_0(x) \right)$$

eine Nennerschranke, wobei

$$N = \text{disp}_q(\varepsilon_q^{-n} a_n(x), a_0(x))$$

ist.

q -Rationale Lösungen von q -holonomen Rekursionen

q -Rationale Lösungen von q -holonomen Rekursionsgleichungen

Eingabe : Eine q -holonome Rekursion $\sum_{k=0}^n a_k(x) \varepsilon_q^k f(x) = 0$

Ausgabe : Alle q -rationalen Lösungen $f(x)$ der q -holonomen Rekursion

```
1 begin
2    $v(x) \leftarrow$  Nennerschanke der  $q$ -rationalen Lösungen
3    $RE \leftarrow \sum_{k=0}^n \frac{a_k(x)}{\varepsilon_q^k v(x)} \varepsilon_q^k f(x) = 0$ 
4    $RE \leftarrow$  Multipliziere  $RE$  mit  $\text{lcm}(v(x), \varepsilon_q v(x), \dots, \varepsilon_q^n v(x))$ 
5    $u(x) \leftarrow$  Bestimme alle  $q$ -polynomialen Lösungen von  $RE$ 
6   if eine Lösung  $u(x)$  existiert then
7     | return  $\frac{u(x)}{v(x)}$ 
8   else
9     | return „Es existieren keine  $q$ -rationalen Lösungen.“
10  end
11 end
```

Der q -Petkovšek-Algorithmus

q -Normalform für q -rationale Funktionen

Sei $r(x) \in \mathbb{F}(x)$. Dann besitzt $r(x)$ die q -Normalform

$$r(x) = z \frac{\alpha(qx) \beta(x)}{\alpha(x) \gamma(x)}$$

mit $z \in \mathbb{F}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}[x]$ normiert und gewissen weiteren Eigenschaften.

Lemma für q -Petkovšek-Algorithmus

Sei

$$\sum_{k=0}^n a_k(x) \varepsilon_q^k f(x) = 0$$

eine q -holonome Rekursionsgleichung und $r(x) \in \mathbb{F}(x)$ ein q -Zertifikat einer q -hypergeometrischen Lösung. Dann gilt für $r(x) = z \frac{\alpha(qx) \beta(x)}{\alpha(x) \gamma(x)}$

$$\beta(x) \mid a_0(x) \quad \text{und} \quad \gamma(x) \mid a_n(q^{1-n}x).$$

Der q -Petkovšek-Algorithmus

q -Hypergeometrische Lösungen von q -holonomen Rekursionsgleichungen

Eingabe : Eine q -holonome Rekursion $\sum_{k=0}^n a_k(x) \varepsilon_q^k f(x) = 0$

Ausgabe : Alle q -Zertifikate q -hypergeometrischer Lsg. $f(x)$ der Rekursion

```

1 begin
2   Certificates  $\leftarrow \emptyset$ 
3   for jeden Faktor  $\beta(x)$  von  $a_0(x)$  do
4     for jeden Faktor  $\gamma(x)$  von  $a_n(q^{1-n}x)$  do
5       for jede Lösung  $z$  von  $\sum_{j=0}^n u_{j0}z^j = 0$  do
6         Bestimme polynomiale Lösungen  $\alpha(x)$  von
7            $\sum_{k=0}^n z^k a_k(x) \left( \prod_{j=0}^{k-1} \beta(q^j x) \right) \left( \prod_{j=k}^{n-1} \gamma(q^j x) \right) \varepsilon_q^k \alpha(x) = 0$ 
8           if eine Lösung existiert then
9             Füge  $r(x) \leftarrow z \frac{\alpha(qx) \beta(x)}{\alpha(x) \gamma(x)}$  zu Certificates hinzu
10            end
11          end
12        end
13      end
14    end
  
```

Der q -Van-Hoeij-Algorithmus

Der Van-Hoeij-Algorithmus

In [Hoe98] entwickelte Mark Van Hoeij einen neuen Algorithmus zur Bestimmung von hypergeometrischen Lösungen von holonomen Rekursionsgleichungen.

Vorteile des Van-Hoeij-Algorithmus gegenüber des einfachen Petkovšek-Algorithmus:

- Hohe Effizienz
- Unnötige Körpererweiterungen werden vermieden

Typ eines q -hypergeometrischen Terms

Zwei q -hypergeometrische Terme $f(x)$ und $g(x)$ sind *vom selben Typ*, wenn gilt:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{F}(x).$$

Der q -Van-Hoeij-Algorithmus

Der Van-Hoeij-Algorithmus

In [Hoe98] entwickelte Mark Van Hoeij einen neuen Algorithmus zur Bestimmung von hypergeometrischen Lösung von holonomen Rekursionsgleichungen.

Vorteile des Van-Hoeij-Algorithmus gegenüber des einfachen Petkovšek-Algorithmus:

- Hohe Effizienz
- Unnötige Körpererweiterungen werden vermieden

Typ eines q -hypergeometrischen Terms

Zwei q -hypergeometrische Terme $f(x)$ und $g(x)$ sind *vom selben Typ*, wenn gilt:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{F}(x).$$

Der q -Van-Hoeij-Algorithmus

Der Van-Hoeij-Algorithmus

In [Hoe98] entwickelte Mark Van Hoeij einen neuen Algorithmus zur Bestimmung von hypergeometrischen Lösung von holonomen Rekursionsgleichungen.

Vorteile des Van-Hoeij-Algorithmus gegenüber des einfachen Petkovšek-Algorithmus:

- Hohe Effizienz
- Unnötige Körpererweiterungen werden vermieden

Typ eines q -hypergeometrischen Terms

Zwei q -hypergeometrische Terme $f(x)$ und $g(x)$ sind *vom selben Typ*, wenn gilt:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{F}(x).$$

Der q -Van-Hoeij-Algorithmus

Der Van-Hoeij-Algorithmus

In [Hoe98] entwickelte Mark Van Hoeij einen neuen Algorithmus zur Bestimmung von hypergeometrischen Lösung von holonomen Rekursionsgleichungen.

Vorteile des Van-Hoeij-Algorithmus gegenüber des einfachen Petkovšek-Algorithmus:

- Hohe Effizienz
- Unnötige Körpererweiterungen werden vermieden

Typ eines q -hypergeometrischen Terms

Zwei q -hypergeometrische Terme $f(x)$ und $g(x)$ sind *vom selben Typ*, wenn gilt:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{F}(x).$$

Der q -Van-Hoeij-Algorithmus

Der q -Van-Hoeij-Algorithmus

Eingabe : Eine q -holonome Rekursion $\sum_{k=0}^n a_k(x) \varepsilon_q^k f(x) = 0$

Ausgabe : Alle q -Zertifikate q -hypergeometrischer Lsg. $f(x)$ der Rekursion

```
1 begin
2   Certificates  $\leftarrow \emptyset$ 
3    $M \leftarrow$  Alle  $q$ -Zertifikate, deren  $q$ -hypergeometrischer Term denselben Typ
4   wie eine  $q$ -hypergeometrische Lösung besitzt (aus  $a_0(x)$  und  $a_n(x)$ )
5   for jedes  $r(x) \in M$  do
6      $RE1 \leftarrow \varepsilon_q f(x) - \frac{1}{r(x)} f(x) = 0$ 
7      $RE2 \leftarrow \sum_{k=0}^n a_k(x) \varepsilon_q^k f(x) = 0$ 
8      $RE \leftarrow$  Bilde Produktrekursion von  $RE1$  und  $RE2$  (Produktalg.)
9     Bestimme alle  $q$ -rationalen Lösungen  $s(x)$  von  $RE$ .
10    if eine Lösung existiert then
11      | Füge  $\frac{\varepsilon_q s(x)}{s(x)} r(x)$  zu Certificates hinzu
12    end
13  end
14  return Certificates
end
```

Konversionen zwischen q -Rekursionen I

Bestimmung einer q -holonomen Rekursion für die Koeffizienten einer q -hypergeometrischen Potenzreihe (bzgl. x^j) von $f(x)$ aus einer q -holonomen Rekursion von $f(x)$

Eingabe : Eine q -holonome Rekursion $\sum_{k=0}^n a_k(x) \varepsilon_q^k f(x) = 0$ für $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$ mit $\frac{c_{j+1}}{c_j} \in \mathbb{F}(q^j)$

Ausgabe : Eine q -holonome Rekursion $\sum_{j=0}^m \tilde{a}_j(q^j) c_j = 0$ für c_j

1 **begin**

2 | Bringe die gegebene Rekursion in expandierte Form.

3 | Führe die formale Substitution $x^i \varepsilon_q^k f(x) \rightarrow q^{-ik} (q^j)^k c_{j-i}$ durch.

4 | **return** die resultierende q -holonome Rekursion für c_j

5 **end**

Bemerkung

Die Ordnung der q -Rekursionsgleichung für die Koeffizienten der q -Reihenentwicklung ist beschränkt durch das Maximum der Grade der Koeffizientenpolynome der betrachteten q -holonomen Rekursionsgleichung.

Konversionen zwischen q -Rekursionen I

Bestimmung einer q -holonomen Rekursion für die Koeffizienten einer q -hypergeometrischen Potenzreihe (bzgl. x^j) von $f(x)$ aus einer q -holonomen Rekursion von $f(x)$

Eingabe : Eine q -holonome Rekursion $\sum_{k=0}^n a_k(x) \varepsilon_q^k f(x) = 0$ für $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$ mit $\frac{c_{j+1}}{c_j} \in \mathbb{F}(q^j)$

Ausgabe : Eine q -holonome Rekursion $\sum_{j=0}^m \tilde{a}_j(q^j) c_j = 0$ für c_j

1 **begin**

2 | Bringe die gegebene Rekursion in expandierte Form.

3 | Führe die formale Substitution $x^i \varepsilon_q^k f(x) \rightarrow q^{-ik} (q^j)^k c_{j-i}$ durch.

4 | **return** die resultierende q -holonome Rekursion für c_j

5 **end**

Bemerkung

Die Ordnung der q -Rekursionsgleichung für die Koeffizienten der q -Reihenentwicklung ist beschränkt durch das Maximum der Grade der Koeffizientenpolynome der betrachteten q -holonomen Rekursionsgleichung.

Der q -FPS-Algorithmus I

Der FPS-Algorithmus

Wolfram Koepf präsentiert in [Koe92] einen Algorithmus, mit dem man zu einer holonomen Funktion die zugehörige formale Potenzreihe (FPS - Formal Power Series) bestimmen kann.

Bestimmung einer q -hypergeometrischen Potenzreihe für eine q -holonome Funktion

Eingabe : Eine q -holonome Funktion $f(x)$

Ausgabe : Eine q -hypergeometrische Potenzreihe (bzgl. x^j) $\sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$ für $f(x)$

1 **begin**

2 | Bestimme eine q -holonome Rekursionsgleichung für $f(x)$.

3 | Konvertiere diese Rekursion in eine q -holonome Rekursion für c_j .

4 | Bestimme die q -hypergeometrischen Lösungen der letzten Rekursion mit dem q -Petkovšek-Algorithmus (bzw. q -Van-Hoeij).

5 | **return** die daraus entstehende Potenzreihe

6 **end**

Der *q*-FPS-Algorithmus I

Der FPS-Algorithmus

Wolfram Koepf präsentiert in [Koe92] einen Algorithmus, mit dem man zu einer holonomen Funktion die zugehörige formale Potenzreihe (FPS - Formal Power Series) bestimmen kann.

Bestimmung einer *q*-hypergeometrischen Potenzreihe für eine *q*-holonome Funktion

Eingabe : Eine *q*-holonome Funktion $f(x)$

Ausgabe : Eine *q*-hypergeometrische Potenzreihe (bzgl. x^j) $\sum_{j=0}^{\infty} c_j x^j$ für $f(x)$

1 **begin**

2 | Bestimme eine *q*-holonome Rekursionsgleichung für $f(x)$.

3 | Konvertiere diese Rekursion in eine *q*-holonome Rekursion für c_j .

4 | Bestimme die *q*-hypergeometrischen Lösungen der letzten Rekursion mit dem *q*-Petkovšek-Algorithmus (bzw. *q*-Van-Hoeij).

5 | **return** *die daraus entstehende Potenzreihe*

6 **end**

Konversionen zwischen *q*-Rekursionen II

Konversionen zwischen *q*-Rekursionen II

Sei f eine *q*-holonome Funktion in x , welche die *q*-holonome Rekursionsgleichung

$$\sum_{k=0}^n a_k(x) \varepsilon_q^k f(x) = 0 \quad \text{mit} \quad a_k \in \mathbb{F}[x]$$

erfüllt und es gelte $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(x; q)_j$ mit $\frac{c_{j+1}}{c_j} \in \mathbb{F}(q^j)$. Dann existiert eine *q*-holonome Rekursion für c_j der Ordnung $n + \max_{k=0, \dots, n} \{\deg(a_k(x), x)\}$.

Identitäten für *q*-Pochhammersymbole

$$\varepsilon_{q^{-1}}(x; q)_j = q^{-j} \left((q^j - 1)(x; q)_{j-1} + (x; q)_j \right)$$

$$x(x; q)_j = q^{-j} \left((x; q)_j - (x; q)_{j+1} \right).$$

Konversionen zwischen *q*-Rekursionen II

Konversionen zwischen *q*-Rekursionen II

Sei f eine q -holonome Funktion in x , welche die q -holonome Rekursionsgleichung

$$\sum_{k=0}^n a_k(x) \varepsilon_q^k f(x) = 0 \quad \text{mit} \quad a_k \in \mathbb{F}[x]$$

erfüllt und es gelte $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j(x; q)_j$ mit $\frac{c_{j+1}}{c_j} \in \mathbb{F}(q^j)$. Dann existiert eine q -holonome Rekursion für c_j der Ordnung $n + \max_{k=0, \dots, n} \{\deg(a_k(x), x)\}$.

Identitäten für q -Pochhammersymbole

$$\varepsilon_{q^{-1}}(x; q)_j = q^{-j} \left((q^j - 1)(x; q)_{j-1} + (x; q)_j \right)$$

$$x(x; q)_j = q^{-j} \left((x; q)_j - (x; q)_{j+1} \right).$$

Der q -FPS-Algorithmus II

Bestimmung einer q -hypergeometrischen Potenzreihe (bzgl. $(x; q)_j$) für eine q -holonome Funktion

Eingabe : Eine q -holonome Funktion $f(x)$

Ausgabe : Eine q -hypergeometrische Potenzreihe (bzgl. $(x; q)_j$)

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j (x; q)_j \text{ für } f(x)$$

1 **begin**

2 Bestimme eine q -holonome Rekursionsgleichung für $f(x)$.

3 Konvertiere diese Rekursion in eine q -holonome Rekursion für c_j .

4 Bestimme die q -hypergeometrischen Lösungen der letzten Rekursion mit dem q -Petkovšek-Algorithmus (bzw. q -Van-Hoeij).

5 **return** *die daraus entstehende Potenzreihe*

6 **end**

Maple-Package q FPS

Maple-Package q FPS

- 4000 Zeilen Code
- Elementare q -Funktionen, q -trigonometrische Funktionen und q -orthogonale Polynome werden unterstützt
- q -Differentiation und q -Shiftberechnung
- Aufstellen von q -holonomen Differential- und Rekursionsgleichungen
- Summen-, Produkt- und Kompositionsalgorithmus für q -holonome Differential- und Rekursionsgleichungen
- q -Petkovšek-Algorithmus
- q -FPS-Algorithmus

In Arbeit ...

- q -Van-Hoeij-Algorithmus

Maple-Package q FPS

Maple-Package q FPS

- 4000 Zeilen Code
- Elementare q -Funktionen, q -trigonometrische Funktionen und q -orthogonale Polynome werden unterstützt
- q -Differentiation und q -Shiftberechnung
- Aufstellen von q -holonomen Differential- und Rekursionsgleichungen
- Summen-, Produkt- und Kompositionsalgorithmus für q -holonome Differential- und Rekursionsgleichungen
- q -Petkovšek-Algorithmus
- q -FPS-Algorithmus

In Arbeit . . .

- q -Van-Hoeij-Algorithmus

Literaturverzeichnis

Literaturverzeichnis

- [Hoe98] Mark Van Hoeij.
Finite singularities and hypergeometric solutions of linear recurrence equations.
Journal of Pure and Applied Algebra, 1998.
- [Koe92] Wolfram Koepf.
Power series in computer algebra.
J. Symbolic Computation, 13:581–603, 1992.
- [KRM07] Wolfram Koepf, Predrag M. Rajković, and Sladjana D. Marinković.
Functions satisfying holonomic q-differential equations.
2007.
- [KS98] Roelof Koekoek and René F. Swarttouw.
The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue.
Number 98-17. Delft University of Technology, 1998.
- [KS01] Wolfram Koepf and Dieter Schmersau.
On a structure formula for classical q-orthogonal polynomials.
Journal of Computational and Applied Mathematics, (136):99–107, 2001.