Prof. Dr. Werner Varnhorn
Dipl.-Math. Sergej König

Wintersemester 2007/2008
23. 11. 2007

Probeklausur Analysis I

Aufgabe 1: Es seien A und B wahre Aussagen. Bestimmen Sie den Wahrheitswert von

$$A \wedge \overline{B}, \qquad \overline{A} \wedge B, \qquad \overline{A \wedge B}, \qquad A \Rightarrow B,$$
$$A \vee \overline{B}, \qquad \overline{\overline{A} \wedge B}, \qquad (\overline{A} \vee \overline{B}) \wedge \overline{A}, \qquad \overline{A \Rightarrow B}.$$

Aufgabe 2: Es sei $f: M \to N$ eine Abbildung und $A, B \subset M$. Beweisen Sie:

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

b) $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$

Aufgabe 3: Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-1| \leq |3x-6|$.

Aufgabe 4: Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, eine gegebene Zahl $n \in \mathbb{N}$ in der Form $n = p + 2q$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ darzustellen?

Aufgabe 5: Es seien $p, n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie durch Induktion über n:

a) $n < p^n \quad (p \neq 1)$

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} (k-1)^p \leq \frac{n^{p+1}}{p+1}$

Hinweis zu b): Verwenden Sie die Bernoulli-Ungleichung in geeigneter Form!

Aufgabe 6:

a) Sei $a_0 := 1$ und $a_{n+1} := (\sum\limits_{k=0}^{n} a_k)^{-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: (a_n) ist eine Nullfolge, und die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ ist divergent.

b) Sei (a_n) eine monoton fallende Folge mit $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k < \infty$. Zeigen Sie: Die Folge $(n\, a_n)$ ist eine Nullfolge.

Hinweis zu b): Wenden Sie das Cauchy-Kriterium auf die Partialsummenfolge geeignet an!