Die projektive Ebene

Was sind unendlich ferne Punkte?

Prof. Dr. Hans-Georg Rück

Fachbereich Mathematik/Informatik
Universität Kassel
Heinrich-Plett-Str. 40
34132 Kassel

Zusammenfassung:

Wir konstruieren die projektive Ebene aus der affinen Ebene durch Hinzunahme von unendlich-fernen Punkten.

Zusammenfassung:

Wir konstruieren die projektive Ebene aus der affinen Ebene durch Hinzunahme von unendlich-fernen Punkten.

Wir geben eine genaue Definition der projektiven Ebene und zeigen, wie man in ihr mit Koordinaten richtig rechnen kann.

Die übliche analytische Ebene $\mathbb{R}^2$ nennen wir die **affine Ebene** über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und bezeichnen sie mit $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$.

Die übliche analytische Ebene $\mathbb{R}^2$ nennen wir die **affine Ebene** über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und bezeichnen sie mit $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$.

Seien g_1 und g_2 zwei verschiedene Geraden in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, dann gilt:

g_1 und g_2 schneiden sich in einem Punkt
$(g_1 \cap g_2 = \{P\})$

oder

g_1 und g_2 sind parallel
$(g_1 \cap g_2 = \{\})$.

Um diese Fallunterscheidung überflüssig zu machen, d.h. um zu erreichen, dass sich zwei verschiedene Geraden immer in einem Punkt schneiden, fügt man in jeder Geradenrichtung einen **unendlich-fernen Punkt** hinzu und sagt, dass dieser unendlich-ferne Punkt auf jeder Geraden dieser Richtung liegt.

Um diese Fallunterscheidung überflüssig zu machen, d.h. um zu erreichen, dass sich zwei verschiedene Geraden immer in einem Punkt schneiden, fügt man in jeder Geradenrichtung einen **unendlich-fernen Punkt** hinzu und sagt, dass dieser unendlich-ferne Punkt auf jeder Geraden dieser Richtung liegt.

Dann gilt: Zwei verschiedene, parallele Geraden haben genau einen Schnittpunkt, nämlich den unendlich-fernen Punkt in ihrer gemeinsamen Richtung. Die Menge aller unendlich-fernen Punkte nennt man die **unendlich-ferne Gerade**.

Um diese Fallunterscheidung überflüssig zu machen, d.h. um zu erreichen, dass sich zwei verschiedene Geraden immer in einem Punkt schneiden, fügt man in jeder Geradenrichtung einen **unendlich-fernen Punkt** hinzu und sagt, dass dieser unendlich-ferne Punkt auf jeder Geraden dieser Richtung liegt.

Dann gilt: Zwei verschiedene, parallele Geraden haben genau einen Schnittpunkt, nämlich den unendlich-fernen Punkt in ihrer gemeinsamen Richtung. Die Menge aller unendlich-fernen Punkte nennt man die **unendlich-ferne Gerade**.

Die affine Ebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ zusammen mit der unendlich-fernen Geraden nennt man die **projektive Ebene** $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ über den reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

Wir wollen dieses Konzept näher erklären und den Begriff “unendlich-fernen Punkt” genauer fassen, um schließlich auch mit diesen Punkten rechnen zu können.

Wir wollen dieses Konzept näher erklären und den Begriff “unendlich-fernen Punkt” genauer fassen, um schließlich auch mit diesen Punkten rechnen zu können.

Dazu legen wir die affine Ebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ in den dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ auf folgende Art:

Wir heben die xy-Ebene um 1 nach oben.

Wir wollen dieses Konzept näher erklären und den Begriff “unendlich-fernen Punkt” genauer fassen, um schließlich auch mit diesen Punkten rechnen zu können.

Dazu legen wir die affine Ebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ in den dreidimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ auf folgende Art:

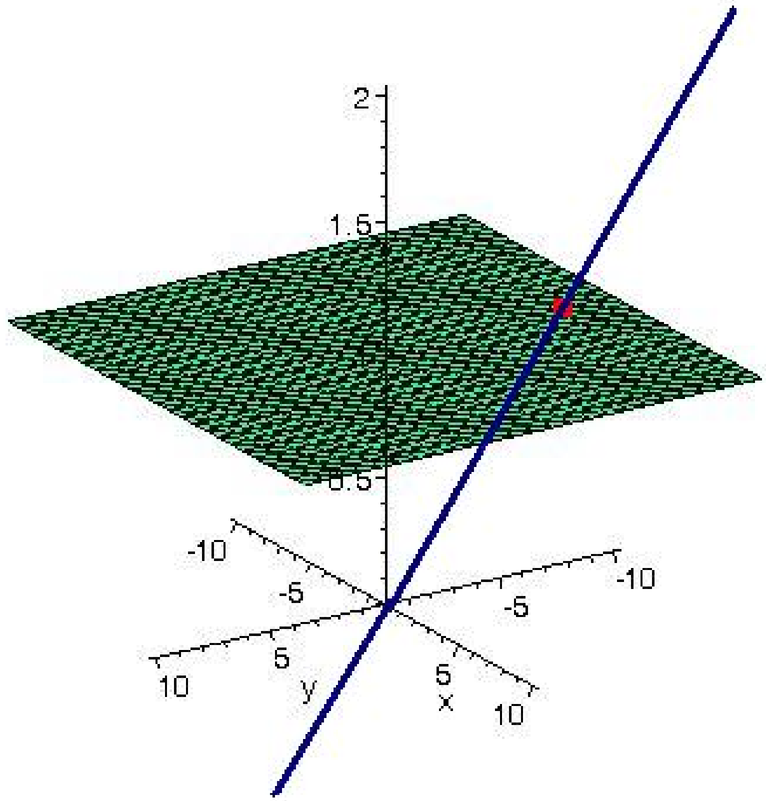
Wir heben die xy-Ebene um 1 nach oben.

Die Punkte im Raum $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ sind also genau die Punkte $\{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

Und so wollen wir von jetzt ab $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ auffassen.

Nun beobachtet man folgendes:

Jeder Punkt im affinen Raum $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, d.h. jedes $(x, y, 1)$, legt im $\mathbb{R}^3$ eindeutig eine Ursprungsgerade fest, nämlich die Gerade durch die beiden Punkte $(0, 0, 0)$ und $(x, y, 1)$.

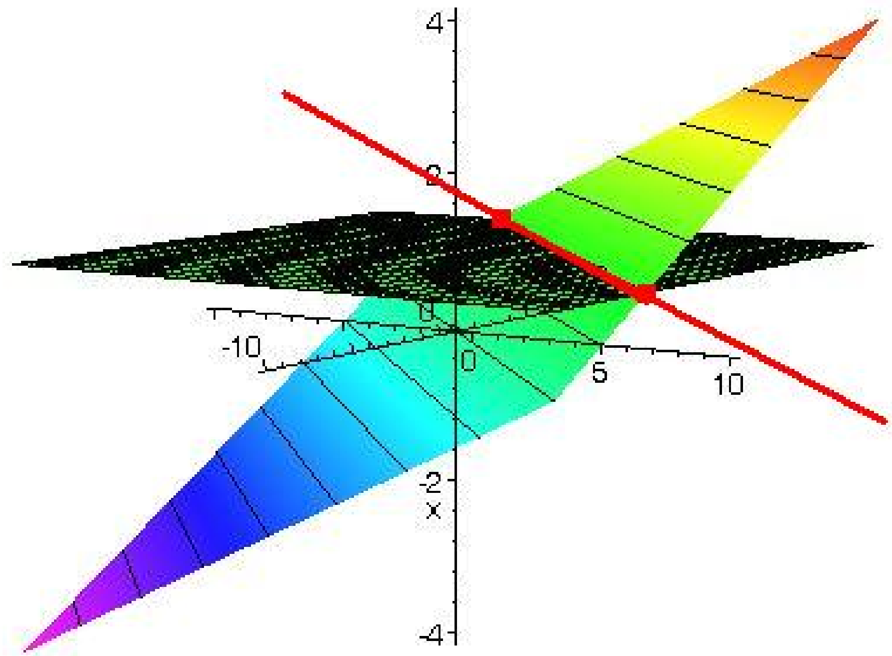

2
1.5
0.5
-10
-5
5
10
y
-10
-5
5
10
x

Eine Gerade im $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, die durch die beiden verschiedenen affinen Punkte

$$(x_1, y_1, 1) \text{ und } (x_2, y_2, 1)$$

geht, legt im $\mathbb{R}^3$ eindeutig eine Ursprungsebene fest, nämlich die Ebene durch die drei Punkte

$$(0, 0, 0)\ ,\ (x_1, y_1, 1) \text{ und } (x_2, y_2, 1)\ .$$

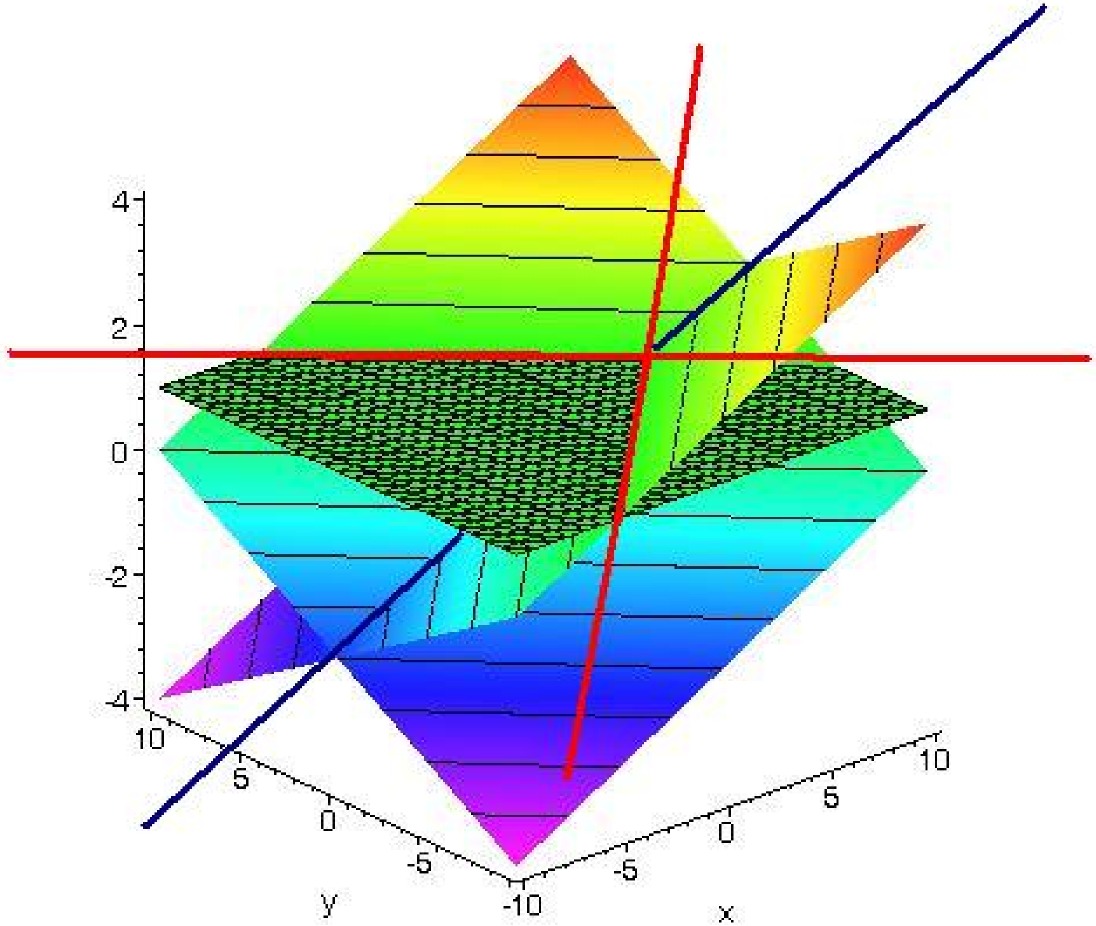


4
2
0
-10
0
5
10
-2
x
-4

Wenn ich im $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ zwei verschiedene, nichtparallele Geraden g_1 und g_2 habe, dann beobachte ich:

Gehört zu g_1 die Ursprungsebene E_1 und zu g_2 die Ursprungsebene E_2,

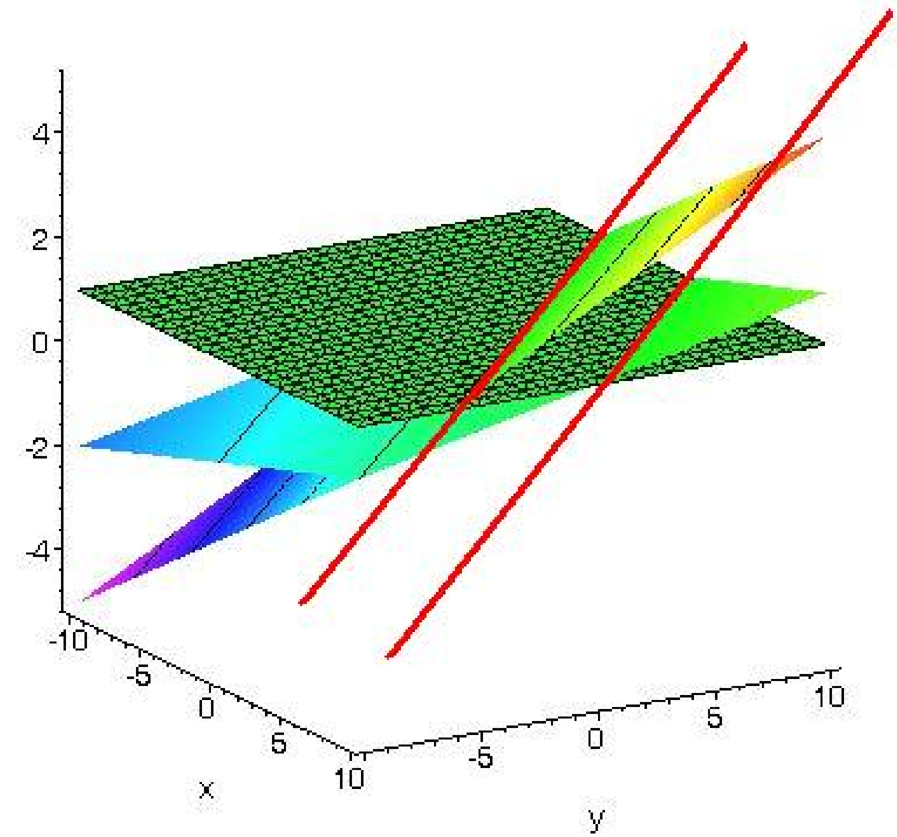
dann schneiden sich E_1 und E_2 in einer Ursprungsgeraden, die gerade durch den affinen Schnittpunkt der affinen Geraden g_1 und g_2 gegeben ist.


4
2
0
-2
-4
10
5
0
-5
-10
y
-5
0
5
10
x

Wenn ich nun im $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ zwei verschiedene parallele Geraden g_1 und g_2 nehme. Dann seien wieder E_1 und E_2 jeweils die zugehörigen Ursprungsebenen im $\mathbb{R}^3$.

Frage: Was ist $E_1 \cap E_2$?

Antwort: Eine Ursprungsgerade h, die mit der affinen Ebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ (in der Form $\{(x, y, 1)\}$) keinen Schnittpunkt gemeinsam hat, die also ganz in der xy-Ebene liegt.


4
2
0
-2
-4
-10
-5
0
5
10
x
-5
0
5
10
y

Diese Ursprungsgeraden sind genau diejenigen, die bei der Zuordnung durch $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ noch fehlen.

D.h. betrachtet man alle Ursprungsgeraden des $\mathbb{R}^3$, so zerfallen diese in zwei Teilmengen

1) solche, die $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ schneiden, denen man folglich einen affinen Punkt zuordnen kann

und

2) solche, die $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ nicht schneiden.

Nun **definieren** wir die projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ folgendermaßen:

Nun **definieren** wir die projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ folgendermaßen:

Die **Punkte der projektiven Ebene** $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sind gerade die Ursprungsgeraden des $\mathbb{R}^3$.

Nun **definieren** wir die projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ folgendermaßen:

Die **Punkte der projektiven Ebene** $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sind gerade die Ursprungsgeraden des $\mathbb{R}^3$.

Die **Geraden der projektiven Ebene** $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sind gerade die Ursprungsebenen des $\mathbb{R}^3$.

Nun **definieren** wir die projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ folgendermaßen:

Die **Punkte der projektiven Ebene** $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sind gerade die Ursprungsgeraden des $\mathbb{R}^3$.

Die **Geraden der projektiven Ebene** $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sind gerade die Ursprungsebenen des $\mathbb{R}^3$.

Die affine Ebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ ist darin enthalten, nämlich als die Menge der Ursprungsgeraden, die durch Punkte der Form $(x, y, 1)$ gehen.

Nun **definieren** wir die projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ folgendermaßen:

Die **Punkte der projektiven Ebene** $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sind gerade die Ursprungsgeraden des $\mathbb{R}^3$.

Die **Geraden der projektiven Ebene** $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sind gerade die Ursprungsebenen des $\mathbb{R}^3$.

Die affine Ebene $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ ist darin enthalten, nämlich als die Menge der Ursprungsgeraden, die durch Punkte der Form $(x, y, 1)$ gehen.

Die **unendlich-fernen Punkte** sind die Ursprungsgeraden in der xy-Ebene,

und die **unendlich-ferne Gerade** (also die Menge aller unendlich-fernen Punkte) ist dabei die Ursprungsebene $\{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

Wir wollen nun Koordinaten für die projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ einführen.

Wir wollen nun Koordinaten für die projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ einführen.

Eine Ursprungsgerade wird durch den Punkt $(0, 0, 0)$ und einen davon verschiedenen Punkt (X, Y, Z) gegeben.

Wir wollen nun Koordinaten für die projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ einführen.

Eine Ursprungsgerade wird durch den Punkt $(0,0,0)$ und einen davon verschiedenen Punkt (X,Y,Z) gegeben.

Die gleiche Gerade wird aber auch durch $(0,0,0)$ und $(\lambda X, \lambda Y, \lambda Z)$ mit $\lambda \neq 0$ gegeben.

Wir wollen nun Koordinaten für die projektive Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ einführen.

Eine Ursprungsgerade wird durch den Punkt $(0, 0, 0)$ und einen davon verschiedenen Punkt (X, Y, Z) gegeben.

Die gleiche Gerade wird aber auch durch $(0, 0, 0)$ und $(\lambda X, \lambda Y, \lambda Z)$ mit $\lambda \neq 0$ gegeben.

Wir führen deshalb die folgenden **Koordinaten** für diese Ursprungsgerade, also **für den zugehörigen projektiven Punkt**, ein:

$$(X : Y : Z)$$

mit der Festlegung

$$(X : Y : Z) = (\lambda X, \lambda Y, \lambda Z)$$

für alle $\lambda \neq 0$.

Dann gilt:

Ein affiner Punkt hat die Koordinaten
$(X : Y : Z)$ mit $Z \neq 0$, also dann

$$(X : Y : Z) = (\frac{X}{Z} : \frac{Y}{Z} : 1) = (x : y : 1) \; .$$

Dann gilt:

Ein affiner Punkt hat die Koordinaten
$(X : Y : Z)$ mit $Z \neq 0$, also dann

$$(X : Y : Z) = (\frac{X}{Z} : \frac{Y}{Z} : 1) = (x : y : 1) \; .$$

Ein unendlich-ferner Punkt hat die Koordinaten $(X : Y : 0)$, wobei natürlich nicht X und Y gleichzeitig 0 sein dürfen.

Aufgabe:

Berechne alle unendlich-fernen Punkte auf der affinen Gerade der Form $y = 3x + 7$.

Aufgabe:

Berechne alle unendlich-fernen Punkte auf der affinen Gerade der Form $y = 3x + 7$.

Wir schreiben als erstes die Geradengleichung projektiv,

Aufgabe:

Berechne alle unendlich-fernen Punkte auf der affinen Gerade der Form $y = 3x + 7$.

Wir schreiben als erstes die Geradengleichung projektiv,

d.h. wir betrachten die zugehörige Ursprungsebene mit der Gleichung $Y = 3X + 7Z$.

Dies erhalten wir, indem wir oben $x = \frac{X}{Z}$ und $y = \frac{Y}{Z}$ einsetzen.

Aufgabe:

Berechne alle unendlich-fernen Punkte auf der affinen Gerade der Form $y = 3x + 7$.

Wir schreiben als erstes die Geradengleichung projektiv,

d.h. wir betrachten die zugehörige Ursprungsebene mit der Gleichung $Y = 3X + 7Z$.

Dies erhalten wir, indem wir oben $x = \frac{X}{Z}$ und $y = \frac{Y}{Z}$ einsetzen.

Nun suche ich die unendlich-fernen Punkte darauf,

Aufgabe:

Berechne alle unendlich-fernen Punkte auf der affinen Gerade der Form $y = 3x + 7$.

Wir schreiben als erstes die Geradengleichung projektiv,

d.h. wir betrachten die zugehörige Ursprungsebene mit der Gleichung $Y = 3X + 7Z$.

Dies erhalten wir, indem wir oben $x = \frac{X}{Z}$ und $y = \frac{Y}{Z}$ einsetzen.

Nun suche ich die unendlich-fernen Punkte darauf,

d.h. ich setze $Z = 0$ ein, und erhalte dann $Y = 3X$.

Somit bekomme ich den Punkt

$$(X : 3X : 0) = (1 : 3 : 0)$$

als einzigen unendlich-fernen Punkt auf der Geraden.

Aufgabe:

Berechne alle unendlich-fernen Punkte auf der affinen Gerade der Form $y = 3x + 7$.

Wir schreiben als erstes die Geradengleichung projektiv,

d.h. wir betrachten die zugehörige Ursprungsebene mit der Gleichung $Y = 3X + 7Z$.

Dies erhalten wir, indem wir oben $x = \frac{X}{Z}$ und $y = \frac{Y}{Z}$ einsetzen.

Nun suche ich die unendlich-fernen Punkte darauf,

d.h. ich setze $Z = 0$ ein, und erhalte dann $Y = 3X$.

Somit bekomme ich den Punkt

$$(X : 3X : 0) = (1 : 3 : 0)$$

als einzigen unendlich-fernen Punkt auf der Geraden.

Übrigens, auf jeder dazu parallelen affinen Geraden $y = 3x+c$ mit $c \in \mathbb{R}$ liegt ebenfalls der unendlich-ferne Punkt $(1 : 3 : 0)$.

Aufgabe:

Berechne alle unendlich-fernen Punkte auf der Parabel mit der Gleichung

$$y = x^2 \ .$$

Aufgabe:

Berechne alle unendlich-fernen Punkte auf der Parabel mit der Gleichung

$$y = x^2 \ .$$

Zuerst schreibt man die Parabel projektiv,

Aufgabe:

Berechne alle unendlich-fernen Punkte auf der Parabel mit der Gleichung

$$y = x^2 \; .$$

Zuerst schreibt man die Parabel projektiv,

d.h. ersetze $x = \frac{X}{Z}$ und $y = \frac{Y}{Z}$.

Man erhält die Gleichung

$$YZ = X^2 \; .$$

Aufgabe:

Berechne alle unendlich-fernen Punkte auf der Parabel mit der Gleichung

$$y = x^2 \ .$$

Zuerst schreibt man die Parabel projektiv,

d.h. ersetze $x = \frac{X}{Z}$ und $y = \frac{Y}{Z}$.

Man erhält die Gleichung

$$YZ = X^2 \ .$$

Setze $Z = 0$, dann gilt auch $X = 0$,

also gibt es einen unendlich-fernen Punkt mit den Koordinaten $(0 : 1 : 0)$.

Aufgabe:

Berechne alle unendlich-fernen Punkte auf der Parabel mit der Gleichung

$$y = x^2 \; .$$

Zuerst schreibt man die Parabel projektiv,

d.h. ersetze $x = \frac{X}{Z}$ und $y = \frac{Y}{Z}$.

Man erhält die Gleichung

$$YZ = X^2 \; .$$

Setze $Z = 0$, dann gilt auch $X = 0$,

also gibt es einen unendlich-fernen Punkt mit den Koordinaten $(0 : 1 : 0)$.

Bei der Parabel mit der Gleichung $y = -x^2 + 1$ erhält man analog zunächst $YZ = -X^2 + Z^2$ und dann ebenfalls den unendlich-fernen Punkt $(0 : 1 : 0)$.

Nun berechnen wir die Schnittpunkte der beiden Parabeln

$$y = x^2 \text{ und } y = -x^2 + 1 \,.$$

Nun berechnen wir die Schnittpunkte der beiden Parabeln

$$y = x^2 \text{ und } y = -x^2 + 1 \; .$$

Im affinen Teil sind dies die Punkte

$$(\sqrt{2}/2 : 1/2 : 1) \text{ und } (-\sqrt{2}/2 : 1/2 : 1) \; .$$

Nun berechnen wir die Schnittpunkte der beiden Parabeln

$$y = x^2 \text{ und } y = -x^2 + 1 \,.$$

Im affinen Teil sind dies die Punkte

$$(\sqrt{2}/2 : 1/2 : 1) \text{ und } (-\sqrt{2}/2 : 1/2 : 1) \,.$$

Dazu kommt der unendlich-ferne Punkt

$$(0 : 1 : 0) \,.$$

Wie oft kommt dieser unendlich-ferne Punkt als Schnittpunkt vor?

Nun berechnen wir die Schnittpunkte der beiden Parabeln

$$y = x^2 \text{ und } y = -x^2 + 1 \;.$$

Im affinen Teil sind dies die Punkte

$$(\sqrt{2}/2 : 1/2 : 1) \text{ und } (-\sqrt{2}/2 : 1/2 : 1) \;.$$

Dazu kommt der unendlich-ferne Punkt

$$(0 : 1 : 0) \;.$$

Wie oft kommt dieser unendlich-ferne Punkt als Schnittpunkt vor?

Dazu betrachten wir die projektiven Darstellungen

$$YZ = X^2 \text{ und } YZ = -X^2 + Z^2 \;.$$

Nun berechnen wir die Schnittpunkte der beiden Parabeln

$$y = x^2 \text{ und } y = -x^2 + 1 \; .$$

Im affinen Teil sind dies die Punkte

$$(\sqrt{2}/2 : 1/2 : 1) \text{ und } (-\sqrt{2}/2 : 1/2 : 1) \; .$$

Dazu kommt der unendlich-ferne Punkt

$$(0 : 1 : 0) \; .$$

Wie oft kommt dieser unendlich-ferne Punkt als Schnittpunkt vor?

Dazu betrachten wir die projektiven Darstellungen

$$YZ = X^2 \text{ und } YZ = -X^2 + Z^2 \; .$$

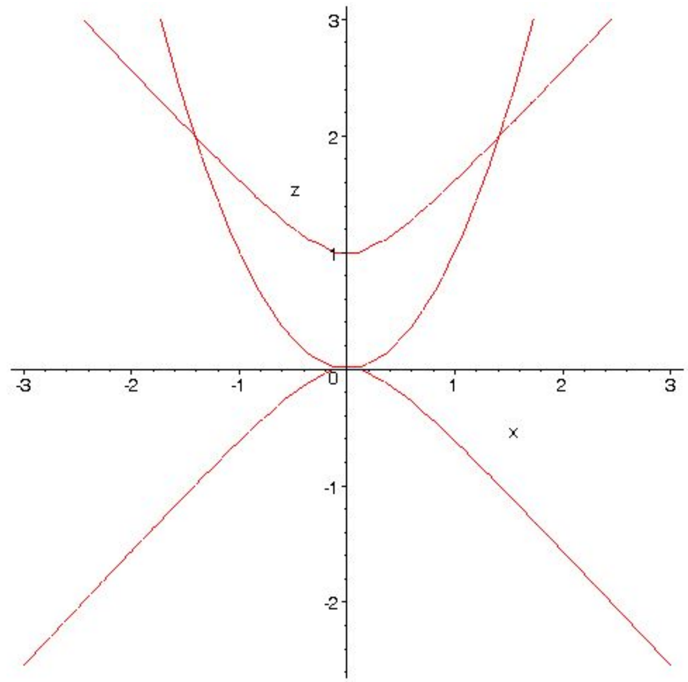
Wir projizieren dies nun auf die Ebene mit der Gleichung $Y = 1$, dies ist ein anderer affiner Teil der projektiven Ebene, in dem aber der unendlich-ferne Punkt liegt.

Dann erhält man die affinen Gleichungen

$$z = x^2 \text{ und } z = -x^2 + z^2 \, .$$

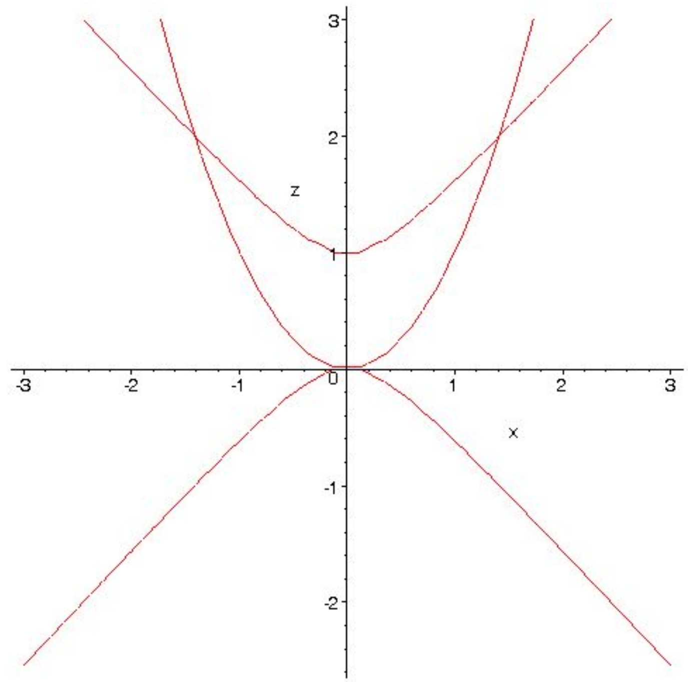
Dann erhält man die affinen Gleichungen

$$z = x^2 \text{ und } z = -x^2 + z^2 \,.$$



Dann erhält man die affinen Gleichungen

$$z = x^2 \text{ und } z = -x^2 + z^2 \ .$$



Man sieht, dass die beiden Kurven bei $(x, z) = (0, 0)$ eine gemeinsame Tangente haben. Die Vielfachheit der Nullstelle ist daher gleich 2.

Somit erhält man für die Anzahl der Schnittpunkte mit Vielfachheit:

$$
\begin{aligned}
& \#(\{y = x^2\} \cap \{y = -x^2 + 1\}) \\
= \; & 4 \\
= \; & \text{grad } (y - x^2) \cdot \text{grad } (y + x^2 - 1).
\end{aligned}
$$

Somit erhält man für die Anzahl der Schnittpunkte mit Vielfachheit:

$$\begin{aligned} & \#(\{y = x^2\} \cap \{y = -x^2 + 1\}) \\ = \; & 4 \\ = \; & \text{grad } (y - x^2) \cdot \text{grad } (y + x^2 - 1). \end{aligned}$$

Diese Formel erhält man also nur, wenn man die unendlich-fernen Punkte mitberücksichtigt.

Somit erhält man für die Anzahl der Schnittpunkte mit Vielfachheit:

$$\begin{array}{rl} & \#(\{y = x^2\} \cap \{y = -x^2 + 1\}) \\ = & 4 \\ = & \text{grad } (y - x^2) \cdot \text{grad } (y + x^2 - 1). \end{array}$$

Diese Formel erhält man also nur, wenn man die unendlich-fernen Punkte mitberücksichtigt.

Wir hatten bereits die Formel für die Anzahl der Schnittpunkt zweier verschiedener Geraden g_1 und g_2:

$$\begin{array}{rl} & \#(g_1 \cap g_2) \\ = & 1 \\ = & \text{grad } g_1 \cdot \text{grad } g_2. \end{array}$$

Dies sind Spezialfälle einer allgemeinen Formel, des **Satzes von Bézout**:

Seien f_1 und f_2 zwei verschiedene Polynome in zwei Variablen, dann ist die Anzahl der Schnittpunkte der Kurven $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ gleich der Zahl

$$\text{grad } (f_1) \cdot \text{grad } (f_2)\ .$$

Dies sind Spezialfälle einer allgemeinen Formel, des **Satzes von Bézout**:

Seien f_1 und f_2 zwei verschiedene Polynome in zwei Variablen, dann ist die Anzahl der Schnittpunkte der Kurven $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ gleich der Zahl

$$\text{grad } (f_1) \cdot \text{grad } (f_2) \; .$$

Dieser Satz gilt also nur, wenn man auch unendlich-ferne Punkte berücksichtigt.

Es tritt allerdings noch eine Schwierigkeit auf, die wir bisher verschwiegen haben.

Es tritt allerdings noch eine Schwierigkeit auf, die wir bisher verschwiegen haben.

Nach der Formel von Bézout müssten die Kurven

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ und } x = 5$$

zwei Schnittpunkte haben.

Es tritt allerdings noch eine Schwierigkeit auf, die wir bisher verschwiegen haben.

Nach der Formel von Bézout müssten die Kurven

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ und } x = 5$$

zwei Schnittpunkte haben.

Im affinen Teil gibt es keine Schnittpunkte, wie man sofort aus den Bildern sieht.

Auf $x = 5$ liegt der unendlich-ferne Punkt $(0 : 1 : 0)$.

Und dieser liegt nicht auf $x^2+y^2 = 1$, wie man an der projektiven Gleichung $X^2+Y^2 = Z^2$ sieht.

Es tritt allerdings noch eine Schwierigkeit auf, die wir bisher verschwiegen haben.

Nach der Formel von Bézout müssten die Kurven

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ und } x = 5$$

zwei Schnittpunkte haben.

Im affinen Teil gibt es keine Schnittpunkte, wie man sofort aus den Bildern sieht.

Auf $x = 5$ liegt der unendlich-ferne Punkt $(0 : 1 : 0)$.

Und dieser liegt nicht auf $x^2+y^2 = 1$, wie man an der projektiven Gleichung $X^2+Y^2 = Z^2$ sieht.

Also wo liegen nun die beiden Schnittpunkte?

Dazu lösen wir in die beiden affinen Gleichungen auf und erhalten

$$y^2 = -24.$$

Dazu lösen wir in die beiden affinen Gleichungen auf und erhalten

$$y^2 = -24.$$

Dies hat natürlich keine reelle Lösung.

Dazu lösen wir in die beiden affinen Gleichungen auf und erhalten

$$y^2 = -24.$$

Dies hat natürlich keine reelle Lösung.

Aber es gibt zwei Lösungen davon in den **komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$, nämlich

$$y = \sqrt{24}i \text{ und } y = -\sqrt{24}i,$$

welche die beiden "affinen Schnittpunkte"

$$(\sqrt{24}i : 5 : 1) \text{ und } (-\sqrt{24}i : 5 : 1)$$

liefern.

Und der Satz von Bézout ist auch hier richtig.

Dazu lösen wir in die beiden affinen Gleichungen auf und erhalten

$$y^2 = -24.$$

Dies hat natürlich keine reelle Lösung.

Aber es gibt zwei Lösungen davon in den **komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$, nämlich

$$y = \sqrt{24}i \text{ und } y = -\sqrt{24}i,$$

welche die beiden "affinen Schnittpunkte"

$$(\sqrt{24}i : 5 : 1) \text{ und } (-\sqrt{24}i : 5 : 1)$$

liefern.

Und der Satz von Bézout ist auch hier richtig.

Der Satz von Bezout gilt im allgemeinen nur, wenn man $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzt, wenn man also im projektiven Raum $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ arbeitet.

Dazu lösen wir in die beiden affinen Gleichungen auf und erhalten

$$y^2 = -24.$$

Dies hat natürlich keine reelle Lösung.

Aber es gibt zwei Lösungen davon in den **komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$, nämlich

$$y = \sqrt{24}i \text{ und } y = -\sqrt{24}i,$$

welche die beiden "affinen Schnittpunkte"

$$(\sqrt{24}i : 5 : 1) \text{ und } (-\sqrt{24}i : 5 : 1)$$

liefern.

Und der Satz von Bézout ist auch hier richtig.

Der Satz von Bezout gilt im allgemeinen nur, wenn man $\mathbb{R}$ durch $\mathbb{C}$ ersetzt, wenn man also im projektiven Raum $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ arbeitet.

Dabei wird $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ aus $\mathbb{C}^2$ genauso konstruiert, wie wir eben $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ aus $\mathbb{R}^2$ gebildet haben.