KLAUSUR

Elementare Arithmetik und Algebra II

23. Juli 2003

(Prof. Dr. Wolfram Koepf)

Name:	Vorname:	Matr.–Nr.:

Bitte lassen Sie genügend Platz zwischen den Aufgaben
und beschreiben Sie nur die Vorderseite der Blätter!

Zum Bestehen der Klausur sind 10 Punkte erforderlich.

1)	2)	3)	4)	5)

Punkte:	Note:

1. (a) **(2 Punkte)** Testen Sie, ob 1234567890123 eine zulässige Artikelnummer EAN ist.
   (b) **(2 Punkte)** Bestimmen Sie die Prüfziffer der Buchnummer ISBN 123456789.

2. (a) **(2 Punkte)** Berechnen Sie die periodische Dezimaldarstellung des Bruchs $\frac{16}{13}$ durch Division.
   (b) **(2 Punkte)** Welchem gekürzten Bruch entspricht die Dezimalzahl $0{,}\overline{123}$?

3. (a) **(2 Punkte)** Ein Annuitätenkredit in Höhe von 200.000 € wird durch jährliche Zahlung von 15.000 € bei einem Zinssatz von 6,2% abbezahlt. Wie viele ganze Jahre dauert dies?
   (b) **(2 Punkte)** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, beim viermaligen Ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne mit 6 weißen und 12 schwarzen Kugeln höchstens eine weiße zu ziehen.

4. Die Strecke c von Punkt A nach Punkt B habe die Länge 100.
   Ein Roboter geht – weil er nicht richtig ausgerichtet war – folgenden Umweg: Von A aus geht er nicht direkt auf B zu, sondern startet im Winkel α. Er bewegt sich geradeaus auf der Strecke b bis zum Punkt C, von wo aus er rechtwinklig die Strecke a entlang direkt auf B zugeht. Hierbei ist $0 < \alpha < 45°$.
   (a) **(1 Punkt)** Erstellen Sie eine Skizze.
   (b) **(1 Punkt)** Welche Längen haben die Strecken $b = \overline{AC}$ und $a = \overline{CB}$ in Abhängigkeit von α?
   (c) Es wird festgestellt, daß der Umweg die Länge 125 hatte.
      i. **(1 Punkt)** Zeigen Sie: Dann gilt $\cos(\alpha) = \frac{5}{4} - \sin(\alpha)$.
      ii. **(2 Punkte)** Berechnen Sie aus einer allgemeinen Beziehung zwischen $\sin(\alpha)$ und $\cos(\alpha)$ zusammen mit dem Ergebnis aus (b.i) den Winkel α.

5. Eine gemeinsame Klassenarbeit in 6 Parallelklassen ergibt die folgende Notenverteilung von insgesamt 150 Schülern:

Note x_k	absolute Häufigkeit h_k	relative Häufigkeit f_k	$h_k\, x_k$	$h_k\, x_k^2$
1	9			
2	28			
3	47			
4	39			
5	25			
6	2			
Σ	$N = 150$			

   (a) **(2 Punkte)** Vervollständigen Sie die Tabelle, indem Sie die Spalten mit der relativen (bzw. prozentualen) Häufigkeit f_k sowie mit den Produkten $h_k\, x_k$ und $h_k\, x_k^2$ ausfüllen und in die letzte Zeile jeweils die Spaltensummen eintragen.
   Bestimmen Sie
   (b) **(1 Punkt)** ... den arithmetischen Mittelwert $\overline{x}$;
   (c) **(1 Punkt)** ... den Median;
   (d) **(1 Punkt)** ... die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{V}$, wobei V die Varianz
$$V = \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{n} h_k x_k^2 \right) - \overline{x}^2$$
   ist.

Lösungen:
1(a). Die Prüfgleichung der EAN 1234567890123 lautet

$$1 + 3 \cdot 2 + 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 3 \cdot 2 + 3 \equiv 95 \equiv 5 \pmod{10} .$$

Da die Prüfsumme ungleich 0 ist, ist die EAN falsch. Die korrekte Prüfziffer wäre $3 + 5 - 10 \equiv 8$.
1(b). Die ISBN-Prüfziffer ergibt sich gemäß

$$a_{10} \equiv 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + \cdots + 9 \cdot 9 \equiv 285 \equiv 10 \pmod{11} .$$

Die Prüfziffer ist also X.
2(a). 16 : 13 = $1{,}\overline{230769}$
2(b).

$$0{,}\overline{123} = \frac{123}{1000} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1000}\right)^k = \frac{123}{1000(1 - \frac{1}{1000})} = \frac{123}{999} = \frac{41}{333} .$$

3(a). Aus $K = 200.000$ €, $A = 15.000$ € und $q = 1{,}062$ folgt

$$n = \frac{\ln \frac{A}{A - K(q-1)}}{\ln q} = 29{,}1342 .$$

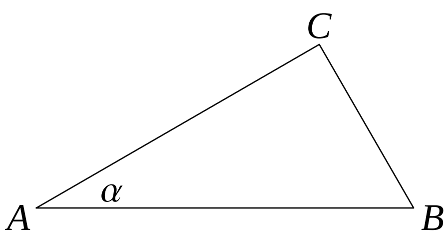
Es dauert also 29 Jahre, bis der Kredit abbezahlt ist.
3(b). Da die Kugeln zurückgelegt werden, liegt eine Binomialverteilung $B_k(n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ vor. 6 weiße und 12 schwarze Kugeln liefern als Laplaceexperiment eine Wahrscheinlichkeit von

$$p = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

für weiß. Wir ziehen $n = 4$ mal. Die Wahrscheinlichkeit P, hierbei höchstens eine weiße Kugel zu ziehen, ist also ($k = 0$ oder $k = 1$)

$$P = \binom{4}{0} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \binom{4}{1} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{16}{81} + \frac{32}{81} = \frac{16}{27} \approx 0{,}592593 .$$

4(a).



Der Roboter geht den Umweg ACB.

4(b). Es ist $\overline{AC} = b = 100 \cdot \cos\alpha$ und $\overline{CB} = a = 100 \cdot \sin\alpha$.
4(c.i). Wegen (b) gilt also

$$125 = b + a = 100 \cdot \cos\alpha + 100 \cdot \sin\alpha = 100 \cdot (\cos\alpha + \sin\alpha)$$

und nach Division durch 100 die angegebene Gleichung.
4(c.ii). Wir quadrieren die Gleichung $\cos\alpha = \frac{5}{4} - \sin\alpha$ und erhalten

$$\cos^2\alpha = \left(\frac{5}{4} - \sin\alpha\right)^2 = \frac{25}{16} - \frac{5}{2}\sin\alpha + \sin^2\alpha .$$

Schreiben wir für $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$ (pythagoreische Identität) und bringen alles auf die rechte Seite, erhalten wir die Gleichung

$$2\sin^2\alpha - \frac{5}{2}\sin\alpha + \frac{9}{16} = 0$$

Nach Division durch 2 entspricht dies der quadratischen Gleichung

$$x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{9}{32} = 0$$

für $x = \sin\alpha$. Die pq-Formel liefert

$$x_{1,2} = \frac{5}{8} \pm \sqrt{\frac{25}{64} - \frac{9}{32}} = \frac{1}{8}\left(5 \pm \sqrt{7}\right) \ .$$

Also ist

$$\alpha_1 = \arcsin x_1 = 17{,}11^\circ$$

und

$$\alpha_2 = \arcsin x_2 = 72{,}89^\circ \ .$$

Der gesuchte Winkel ist also $\alpha_1 = 17{,}11^\circ$.

5(a).

Note x_k	absolute Häufigkeit h_k	relative Häufigkeit f_k	F_k	$h_k\, x_k$	$h_k\, x_k^2$
1	9	6	6	9	9
2	28	18,7	24,7	56	112
3	47	31,3	56	141	423
4	39	26	82	156	624
5	25	16,7	98,7	125	625
6	2	1,3	100	12	72
Σ	$N = 150$	100		499	1865

5(b). $\overline{x} = \frac{499}{150} \approx 3{,}32667$

5(c). $V = \frac{1865}{150} - 3{,}32667^2 \approx 1{,}36662$

5(d). $\sigma = \sqrt{V} \approx 1{,}16903$.