1 Mengen und Zahlen

1.1 Mengen und Aussagen

In der Mathematik spielen die Zahlen eine wichtige Rolle. Zahlen werden zu Mengen zusammengefaßt. So spricht man z. B. von der Menge der reellen Zahlen, die in § 1.3 betrachtet wird.

Eine *Menge*[1] A ist eine Zusammenfassung von Objekten, die die *Elemente* von A genannt werden. Wir schreiben

$$A = \{a, b, c, \ldots\} .$$

Ist a ein Element von A, schreiben wir $a \in A$. Eine Menge A heißt *Teilmenge*[2] der Menge B, wenn alle $x \in A$ auch Elemente von B sind. Wir schreiben dann $A \subset B$ oder $B \supset A$. Die *Vereinigung*[3]

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ oder } x \in B\}$$

von A und B enthält sowohl die Elemente von A als auch die von B. Das Symbol **:=** bedeutet hier *ist definiert durch*. Außerdem bezeichnet

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \in B\}$$

den *Durchschnitt*[4] von A und B, und

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \text{ und } x \notin B\}$$

steht für die *Mengendifferenz*. Dabei bedeutet $x \notin B$, daß x kein Element von B ist. Man beachte, daß B keine Teilmenge von A sein muß. Durch

$$\emptyset := \{\}$$

stellen wir die *leere Menge*[5] dar, die keine Elemente enthält. Ist der Durchschnitt zweier Mengen A und B leer ($A \cap B = \emptyset$), d. h. besitzen sie keine gemeinsamen Elemente, werden A und B *disjunkt* genannt.

Für die beiden Mengen $A := \{a, b, c, d, e\}$ und $B := \{a, c, e, g\}$ z. B. gilt weder $A \subset B$ noch $B \subset A$. Es gelten jedoch die Beziehungen $A \cup B = \{a, b, c, d, e, g\}$, $A \cap B = \{a, c, e\}$, $A \setminus B = \{b, d\}$ und schließlich $B \setminus A = \{g\}$.

[1] Englisch: set
[2] Englisch: subset
[3] Sprich: Die Menge aller x, für die $x \in A$ oder $x \in B$ gilt. Englisch: union
[4] Englisch: intersection
[5] Englisch: empty set

Sind zwei Aussagen S und T *äquivalent* (gleichwertig, S genau dann, wenn T), dann schreiben wir $S \Leftrightarrow T$. Beispielsweise gilt

$$A = B \iff (x \in A \quad \Leftrightarrow \quad x \in B)$$

oder

$$x \in A \cup B \iff (x \in A \quad \text{oder} \quad x \in B) \; .$$

Wenn die Aussage S die Aussage T *impliziert* (T folgt aus S), so schreiben wir $S \Rightarrow T$. Beispielsweise gilt

$$A \subset B \iff (x \in A \quad \Rightarrow \quad x \in B) \; .$$

In der modernen Mathematik werden neue wahre Aussagen mit Hilfe von Implikationen (Folgerungen) aus alten abgeleitet. Deshalb benötigt man eine bestimmte Anzahl einfacher Regeln, die als wahr angenommen werden. Diese Regeln werden *Axiome* genannt. Die Axiome für die Menge der reellen Zahlen umfassen 13 Regeln für diese. Die meisten werden der Leserin und dem Leser sehr bekannt vorkommen. Diese Regeln werden in § 1.3 eingeführt.

Übungsaufgaben

1.1 *In einer Übungsgruppe mit* 21 *Studenten gibt es* 8 *Raucher,* 14 *Studenten trinken manchmal Alkohol, und* 5 *Studenten tun beides. Wieviele Studenten trinken nicht und sind Nichtraucher?*

1.2 *Angenommen* $A := \{1, 2, \ldots, 10\}$, $B := \{x \mid x \text{ ist gerade}\}$, $C := \{2, 4, 6, 8, 10\}$ *und* $D := \{1, 3, 5, 7, 9\}$.

(a) *Gib alle möglichen Mengen an, die man aus A, B, C und D mit $\cup, \cap$ und $\setminus$ bilden kann.*

(b) *Ist eine der Mengen eine Teilmenge einer anderen?*

(c) *Welche Mengen sind disjunkt?*

1.2 Natürliche Zahlen und vollständige Induktion

Mit $\mathbb{N}_0$ bezeichnen wir die Menge der *natürlichen Zahlen* oder der *nichtnegativen ganzen Zahlen*

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\} \; .$$

Wir nehmen an, daß Leserinnen und Leser mit den Operationen der *Addition* (+) und der *Multiplikation* ($\cdot$,$\times$) auf $\mathbb{N}_0$ vertraut sind.

Definition 1.1 (Induktionsprinzip) Jedoch wollen wir auf folgende bemerkenswerte Eigenschaft von $\mathbb{N}_0$ näher eingehen:

(a) $0 \in \mathbb{N}_0$,

(b) ist $N \in \mathbb{N}_0$, dann ist auch $N + 1 \in \mathbb{N}_0$.

Die plausible Tatsache, daß jede Teilmenge M von $\mathbb{N}_0$ mit diesen beiden Eigenschaften ganz $\mathbb{N}_0$ ist, heißt *Induktionsprinzip*. Das heißt, ist $0 \in M$, und liegt für jede Zahl N aus M auch die nachfolgende Zahl $N + 1$ in M, dann gilt $M = \mathbb{N}_0$. △

Das Induktionsprinzip wird zum Beweis von *Sätzen*[6] verwendet, in denen eine *Variable* vorkommt, die Werte in $\mathbb{N}_0$ annehmen kann. Möchte man beweisen, daß die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ wahr ist, dann sagt das Induktionsprinzip, daß es genügt nachzuweisen, daß

(a) $A(0)$ wahr ist

und

(b) wenn $A(N)$ für ein $N \in \mathbb{N}_0$ wahr ist, dann auch $A(N + 1)$ gilt.

Mit dem Induktionsprinzip umfaßt die Menge $M \subset \mathbb{N}_0$ der Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$, für die $A(n)$ wahr ist, ganz $\mathbb{N}_0$.

Wir wollen diese Methode noch aus einem anderen Blickwinkel betrachten. Anstatt die Implikationskette

$$A(0) \quad \text{und} \quad \Big(A(0) \Rightarrow A(1)\Big) \quad \text{und} \quad \Big(A(1) \Rightarrow A(2)\Big) \quad \text{und} \quad \ldots \tag{1.1}$$

zu beweisen (was auch gar nicht möglich wäre, da dies unendlich viele Implikationen sind), beweisen wir $A(0)$ sowie, daß *für beliebiges* $N \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(N) \Rightarrow A(N + 1)$ wahr ist. Dies ist natürlich gleichwertig zu der Beweiskette (1.1). Wir können auch die folgende Beschreibung dieses Prozesses geben: Nimm an, eine unendliche Folge numerierter Dominosteine sei gegeben. Nimm ferner an, wir arrangieren diese Steine in der Reihenfolge ihrer Nummern in einem derartigen Abstand, daß jeder den darauffolgenden umwirft, falls er selbst umfällt. Werfen wir nun den ersten Stein um, dann ist es klar, daß dieser den zweiten, der wiederum den dritten Stein umwerfen wird, und schließlich werden alle Steine umfallen. Etwas Ähnliches geschieht beim Induktionsprozeß.

Im Folgenden werden wir diese Methode auf einige Beispiele anwenden. Man nennt dieses Verfahren *Beweis durch vollständige Induktion*.

Zuerst weisen wir eine Summenformel nach. Die Summe der Zahlen a_k für $k = 0, \ldots, n$ wird durch das Symbol[7]

$$\sum_{k=0}^{n} a_k := a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

[6] Ein *Satz* ist ein aus den Axiomen hergeleiteter wahrer Sachverhalt. Englisch: theorem

[7] Der Ausdruck, der mit Hilfe der Punkte dargestellt wird, wird gerade durch das Induktionsprinzip definiert.

dargestellt (eine entsprechende Notation wird auch verwendet, wenn der Startwert von k nicht bei 0 liegt). Das Symbol Σ ist das Zeichen für *Summe*[8]. Man beachte, daß k durch jedes andere Symbol ersetzt werden kann, ohne daß sich die Bedeutung des Ausdrucks ändert. Ein solches Objekt heißt *Summationsindex* oder *Summationsvariable*.

Beispiel 1.1 (Eine Summenformel) Wir betrachten die Summe der ersten natürlichen Zahlen

$$0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n \,. \tag{1.2}$$

Auf Grund unserer Vereinbarung können wir die Summe (1.2) schreiben als

$$0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=0}^{n} k \,.$$

Wir beweisen die Aussage

$$A(n): \qquad \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \tag{1.3}$$

durch vollständige Induktion. Dazu müssen wir

(a) den *Induktionsanfang* „$A(0)$ ist wahr" zeigen und

(b) nachweisen, daß die Aussage $A(N+1)$ aus der Gültigkeit der *Induktionsvoraussetzung* $A(N)$ folgt.

Schritt (b) wird der *Induktionsschritt* genannt.

In unserem Beispiel ist der Induktionsanfang $A(0)$ die Aussage $0 = 0$, die offensichtlich wahr ist. Den Induktionsschritt erhalten wir aus der Gleichungskette[9]

$$\sum_{k=0}^{N+1} k \overset{\text{(def.)}}{=\!=} \left(\sum_{k=0}^{N} k\right) + (N+1) \overset{(A(N))}{=\!=} \frac{N(N+1)}{2} + (N+1) = \frac{(N+1)(N+2)}{2} \,,$$

wobei sich die erste Gleichung aus der Definition der Summe und die zweite durch die Induktionsvoraussetzung ergibt. Die sich ergebende Gleichung entspricht genau der Aussage $A(N+1)$. Man beachte, daß lediglich die Berechnung

$$\frac{N(N+1)}{2} + N + 1 = \frac{(N+1)(N+2)}{2} \,, \tag{1.4}$$

ausgeführt werden mußte – eine rein algebraische Umformung.

[8]Der griechische Buchstabe Σ („Sigma") entspricht dem S des Wortes Summe.

[9]Die Notation $\overset{\text{(def.)}}{=\!=}$ weist darauf hin, daß diese Gleichung auf Grund der Definition der Summe gilt, während die Notation $\overset{(A(N))}{=\!=}$ besagt, daß sich die rechte Seite mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung $A(N)$ ergibt.

Sitzung 1.1 An dieser Stelle wollen wir untersuchen, wie man DERIVE erfolgreich anwendet. Angenommen, man will die Gleichung (1.4) durch eine symbolische Umformung mit Hilfe von DERIVE nachweisen. Dazu startet man DERIVE, indem man `DERIVE` eingibt (oder `derive`, da das Betriebssystem MS-DOS oder PC-DOS Groß- und Kleinschreibung nicht unterscheidet), und dann die `<RETURN>`- oder `<ENTER>`-Taste[10] (Zeilenschalttaste) drückt. Man kommt so in das Hauptmenü von DERIVE. Der Begrüßungsbildschirm von DERIVE sieht ungefähr aus wie in Abbildung 1.1.

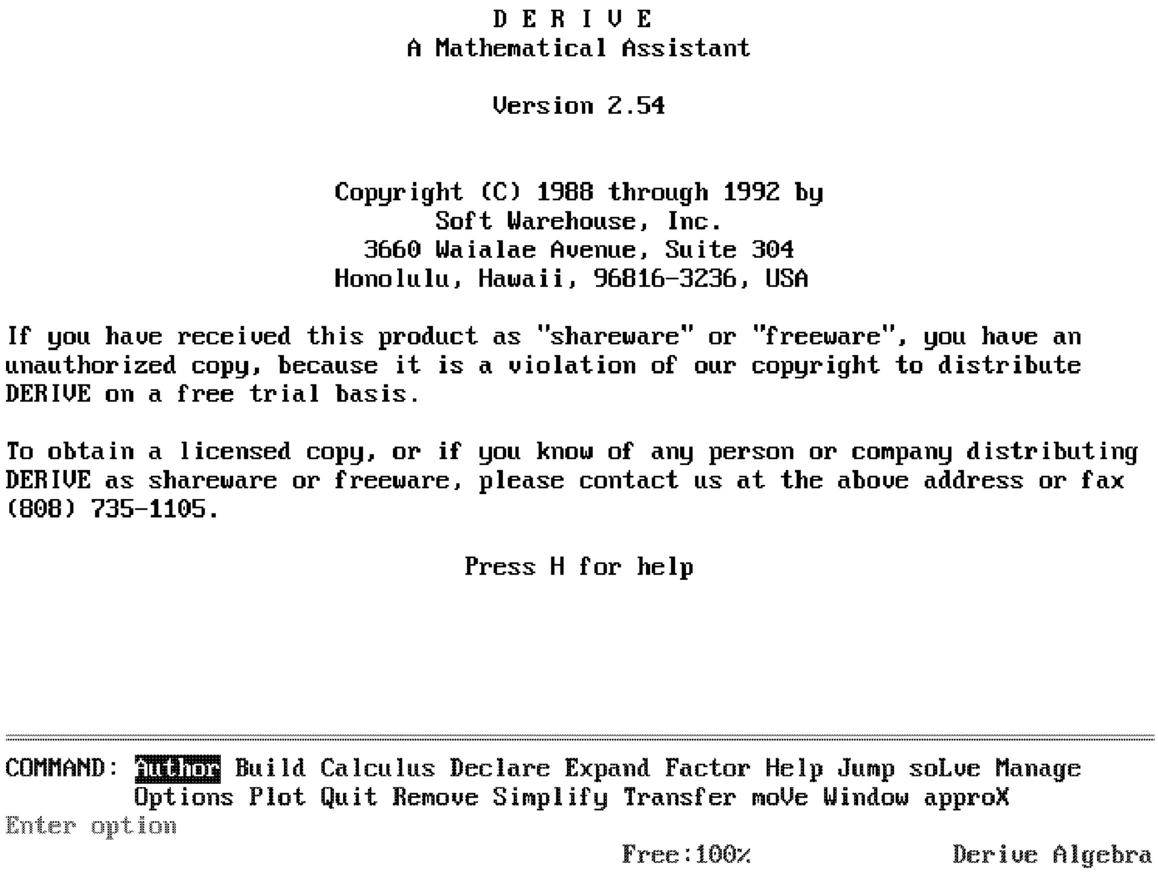

Abbildung 1.1 Der Bildschirm beim Start von DERIVE

Die Hervorhebung des Wortes `Author` zeigt an, daß man nach nochmaligem Drücken der `<ENTER>`-Taste einen eigenen Ausdruck eingeben kann. Die Eingabesyntax von DERIVE benutzt die Symbole `+`,`-`,`*` für Addition, Subtraktion und Multiplikation sowie `/` für die Division und für Brüche. Außerdem kann man Klammern `()` und das Potenzsymbol `^` verwenden. Wir drücken `<ENTER>` und schreiben `n(n+1)/2 + n+1` als Antwort auf die Eingabeaufforderung `Author expression:`. Nach nochmaliger Eingabe von `<ENTER>` wird der Ausdruck eingelesen, DERIVE bringt ihn in die übliche mathematische Form und gibt die Zeile

$$1: \qquad \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \; .$$

aus. Man beachte, daß DERIVE die üblichen Prioritäten der arithmetischen Operationen verwendet. Multiplikation und Division haben eine höhere Priorität als Addition

[10]Englisch: key

und Subtraktion („Punkt vor Strich!“[11]), und es liegt am Benutzer, einen Ausdruck richtig einzugeben. Deshalb sollte man lieber zuviele als zuwenige Klammern verwenden!

Nach nochmaliger Eingabe von `<ENTER>` kann man einen weiteren `Author` Ausdruck eingeben. Wir schreiben nun `(n+1)(n+2)/2` und drücken `<ENTER>`. DERIVE antwortet mit

$$2: \qquad \frac{(n+1)(n+2)}{2}\,.$$

Nun wollen wir wissen, ob die beiden eingegebenen Ausdrücke algebraisch übereinstimmen, indem wir nachprüfen, ob ihre Differenz 0 ergibt. Da jeder Ausdruck von DERIVE eine Nummer bekommen hat, können wir diese Nummer als Referenz für den entsprechenden Ausdruck verwenden[12]. Geben wir z. B. den Ausdruck `#2-#1` ein, so gibt DERIVE die Zeile

$$3: \qquad \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \left[\frac{n(n+1)}{2} + n + 1\right]$$

aus. Man beachte, daß DERIVE die Formeln zunächst nicht verändert. Dies geschieht erst durch Aufruf des `Simplify` Kommandos. Die Antwort von DERIVE lautet dann

$$4: \qquad 0\,,$$

das gewünschte Ergebnis. Abbildung 1.2 zeigt den Bildschirminhalt nach unserer Beispielsitzung.

Nun wollen wir unsere DERIVE-Sitzung in einer Datei *speichern*. Dazu verwenden wir den Befehl `Transfer Save`. Antworten wir `sitzung1 <ENTER>` auf DERIVEs Frage nach einem Dateinamen, dann schreibt DERIVE den Inhalt unserer ersten Sitzung in die Datei `SITZUNG1.MTH` ins augenblickliche Verzeichnis. Wir verlassen dann DERIVE mit dem Befehl `Quit`. Das DOS Kommando `type sitzung1.mth` gibt den Inhalt unserer Datei aus:

```
n*(n+1)/2+n+1

(n+1)*(n+2)/2

(n+1)*(n+2)/2-(n*(n+1)/2+n+1)

0
```

[11] Im Zweifelsfall wendet DERIVE Operationen *gleicher* Priorität immer von links nach rechts an.

[12] Das Symbol `#`n bezieht sich auf den Ausdruck mit der Zeilennummer n.

Man beachte, daß DERIVE unsere Formeln im *Eingabeformat* und nicht im *Ausgabeformat* der Bildschirmdarstellung gespeichert hat. Dies ermöglicht uns, die Sitzung mit Hilfe des `Transfer Load` oder `Transfer Merge` Menüs später wieder zu *laden*. Bei `Load` wird die bisherige Sitzung gelöscht, während `Merge` die geladenen Ausdrücke anhängt.

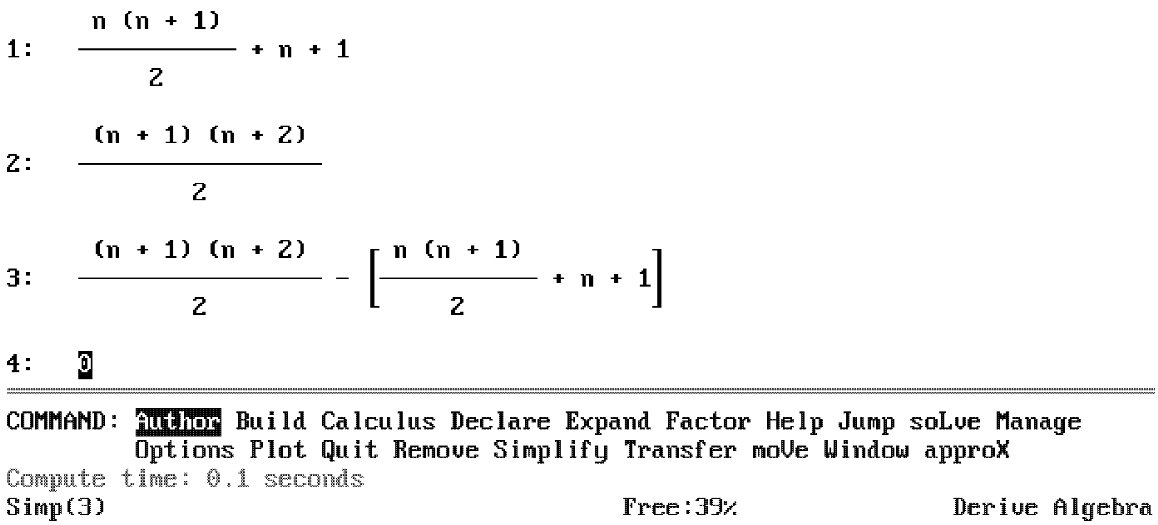

Abbildung 1.2 Der Bildschirm bei einer DERIVE-Sitzung

Wie wir oben gesehen haben (wo?), kann das Induktionsprinzip auch für Definitionen verwendet werden. Diese Technik wird *rekursive Definition* genannt.

Definition 1.2 (Fakultät) So kann man beispielsweise die *Fakultät*[13] $n!$ rekursiv definieren durch

$$\begin{aligned} 0! &:= 1 \\ (n+1)! &:= (n+1) \cdot n! \qquad (n \in \mathbb{N}) \,. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Dabei ist $\mathbb{N} := \mathbb{N}_0 \setminus \{0\}$ die Menge der *positiven natürlichen Zahlen*. Manchmal schreibt man auch

$$n! = n(n-1) \cdots 1$$

als Abkürzung für die rekursive Definition. Diese Schreibweise macht jedoch nur für $n \in \mathbb{N}$ Sinn. $\triangle$

Für Produkte führt man ein Symbol ein, das dem Summensymbol entspricht:

$$\prod_{k=0}^{n} a_k := a_0 \cdot a_1 \cdots a_n$$

(und entsprechend, wenn der Index k nicht bei 0 beginnt). Das Symbol Π ist das Zeichen für *Produkt*[14]. Wir können also auch

[13] Sprich: „n Fakultät". Englisch: factorial

[14] Der griechische Buchstabe Π („Pi") entspricht dem P des Wortes Produkt.

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k$$

schreiben. Damit das Produktsymbol auch für $n = 0$ sinnvoll bleibt, setzen wir („leeres Produkt")

$$\prod_{k=1}^{0} a_k := 1 \; .$$

Entsprechendes gilt immer, wenn der Anfangswert von k den Endwert um 1 übertrifft. Aus ähnlichen Gründen setzen wir („leere Summe")

$$\sum_{k=k_0}^{k_1} a_k := 0$$

für $k_0 = k_1 + 1$.

Beispiel 1.2 (Binomialkoeffizienten) Die *Binomialkoeffizienten* $\binom{n}{k}$ sind für $0 \le k \le n$ durch[15]

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

erklärt. Wir können den Bruch wie folgt kürzen

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n+1-k)}{k(k-1)\cdots 1} = \prod_{j=1}^{k} \frac{n+1-j}{j} \; ,$$

wobei Nenner und Zähler des resultierenden Produkts die gleiche Anzahl von Faktoren besitzen – nämlich k. Die Binomialkoeffizienten können mit dem *Pascalschen*[16] *Dreieck* erzeugt werden,

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & & & & & n=0 \\
 & & & 1 & & 1 & & & & & n=1 \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & & n=2 \\
 & & & \searrow & & \swarrow & & & & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & n=3 \\
\nearrow & & \vdots\nearrow & & \vdots\nearrow & & \vdots\nearrow & & & & \\
k=0 & \vdots & k=1 & \vdots & k=2 & \vdots & k=3 & \vdots & \ddots & &
\end{array}$$

[15] Sprich: „n über k".
[16] Blaise Pascal [1623–1662]

bei dem jeder Eintrag die Summe der beiden darüberstehenden Einträge bildet. Dies werden wir nun beweisen.

Dazu müssen wir zeigen, daß

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \tag{1.6}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ $(0 \leq k \leq n)$ gilt. Es gilt tatsächlich

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k+1)!}\Big((n-k+1)+k\Big) \\
&= \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k},
\end{aligned}$$

was das Resultat beweist. Diese Beweistechnik nennt man einen *direkten Beweis*.

Sitzung 1.2 Derive kennt sowohl die Fakultät als auch die Binomialkoeffizienten. Die Fakultät kann so eingegeben werden, wie wir dies gewohnt sind. Zum Beispiel kann man den Befehl `Author` `50! <ENTER>` eingeben und mittels `Simplify` vereinfachen. Das Ergebnis ist

2 : 30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000 .

Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ wird in Derive `COMB(n,k)` genannt, da er die Anzahl von Kombinationen angibt, mit der k Objekte einer Grundgesamtheit von n Objekten entnommen werden können. Alle Funktionen von Derive werden in Großbuchstaben ausgegeben, können jedoch auch in Kleinschreibung eingegeben werden. Die Vereinfachung von `COMB(n,k)` ergibt

4 : $\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$.

Nun beweisen wir Aussage (1.6) nochmals: Vereinfachung des Ausdrucks `COMB(n+1,k) - COMB(n,k) - COMB(n,k-1)` erzeugt erneut 0. Auch die Beziehung

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k},$$

welche direkt aus der Definition folgt, kann mit Derive nachvollzogen werden.

Definition 1.3 (Potenz) Auch die Potenz[17] ist rekursiv definiert durch

$$k^n := \prod_{j=1}^{n} k \qquad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{1.7}$$

Diese Definition gilt im Augenblick nur für $k \in \mathbb{N}_0$, wird aber später auf reelle Zahlen erweitert werden. Durch die Definition des Produktsymbols ist $k^0 = 1$. Die Zahl n heißt der *Exponent* von k^n.

[17] Englisch: power

Sitzung 1.3 Wir wollen nun nachprüfen, ob DERIVE ähnlich wie Gleichung (1.3) eine Formel für $\sum_{k=1}^{n} k^m$ für $m \in \mathbb{N}$ findet. Dazu geben wir `k^m` ein und wählen dann das `Calculus` Menü aus. Wie man sieht, kann man in diesem Menü Funktionen differenzieren und integrieren, man kann Grenzwerte, Produkte und Summen bilden sowie Taylor-Entwicklungen berechnen. Wir wollen mit dem `Calculus Sum` Befehl eine Summe bilden. DERIVE fragt nun nach dem zu summierenden *Ausdruck* `expression`, nach der *Summationsvariablen* `variable` sowie nach den *Summationsgrenzen* `lower limit` und `upper limit`. Wir produzieren damit die Summe

$$\sum_{k=1}^{n} k^m \,. \tag{1.8}$$

Dasselbe Ergebnis kann man auch durch Eingabe des Ausdrucks `SUM(k^m,k,1,n)` erzeugen. (Entsprechend gibt es für Produkte das `Calculus Product` Menü bzw. die `PRODUCT` Prozedur.) Man versuche nun, (1.8) mit `Simplify` zu vereinfachen. Man stellt fest, daß DERIVE den Ausdruck nicht verändert. Dieses Beispiel liegt außerhalb der Fähigkeiten von DERIVE.
Es stellt sich nun die Frage, ob DERIVE das Problem für ein *festes* m lösen kann. Wir versuchen es mit $m = 3$, indem wir m durch 3 ersetzen. Dies geschieht mit dem `Manage Substitute` Menü. DERIVE fragt dann für jede Variable, die im betrachteten Ausdruck vorkommt, ob diese ersetzt werden soll. Wir müssen also die Frage `SUBSTITUTE value: k` durch die Eingabe von `<ENTER>` verneinen, da wir ja nicht k durch etwas anderes ersetzen wollen. Hingegen müssen wir in der Zeile `SUBSTITUTE value: m` die Variable m durch 3 ersetzen. Schließlich bestätigen wir die Zeile `SUBSTITUTE value: n` durch erneute Eingabe von `<ENTER>`. Dies liefert

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 \tag{1.9}$$

und `Simplify` ergibt dann

$$\frac{n^2(n+1)^2}{4} \,, \tag{1.10}$$

also das gewünschte Ergebnis.

Definition 1.4 (Potenzen mit negativem Exponenten) Man kann die Potenz auch für negative Exponenten durch

$$k^{-n} := \frac{1}{k^n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

definieren. Dies hat den Vorteil, daß die Potenzregeln

$$k^{n+m} = k^n \cdot k^m$$

und

$$k^{nm} = (k^n)^m$$

dann für ganze Zahlen m und n gelten.

Übungsaufgaben

1.3 *Beweise durch vollständige Induktion, daß die Ausdrücke* (1.9) *und* (1.10) *übereinstimmen.*

○ **1.4** *Man bestimme mit Hilfe von* Derive *jeweils eine Formel für den Ausdruck* (1.8) *für* $m = 2, \ldots, 6$ *und beweise die Formeln durch vollständige Induktion. Insbesondere gilt für die Summe der ersten Quadratzahlen*

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \; . \tag{1.11}$$

1.5 *Zeige die Beziehungen*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

und

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \mp \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

durch vollständige Induktion. Schreibe die Formeln mit einem Summenzeichen und überprüfe die Beziehungen mit Derive *für* $n = 1, \ldots, 10$.

◇ **1.6** *Man errate eine explizite Formel für*

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} k \cdot k! \; ,$$

und beweise diese durch vollständige Induktion. Hinweis: *Benutze* Derive *und die* `VECTOR` *Funktion (s.* Derive*-Sitzung* 13.3*).*

⋆ **1.7** *Beweise, daß der Bruch*

$$\frac{n^{m+1} + (n+1)^{2m-1}}{n^2 + n + 1}$$

für alle $n, m \in \mathbb{N}$ *eine natürliche Zahl ist.* Hinweis: *Man führe eine vollständige Induktion bzgl. der Variablen* m *durch.*

◇ **1.8** *Löse mit* Derive*: Wie viele Terme* n *braucht man, um ein Resultat mit* 3 *gleichen Dezimalstellen für die Summe* $\sum\limits_{k=1}^{n} k$ *zu erhalten? Welches ist die resultierende Summe?*

1.9 *Zeige, daß für alle* $n \in \mathbb{N}$ *die Zahl* $5^{2n+1}2^{n+2} + 3^{n+2}2^{2n+1}$ *den Faktor* 19 *besitzt.*

1.3 Die reellen Zahlen

Wenn man ohne Einschränkungen mit der *Subtraktion* $(-)$ arbeitet – der zur Addition inversen Operation –, dann muß man die negativen Zahlen zu $\mathbb{N}_0$ hinzunehmen und erhält so die *Menge der ganzen Zahlen*[18]

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \ .$$

Verwendet man nun die *Division* $(/)$ – also die zur Multiplikation inverse Operation – ohne Einschränkungen, so muß man die *Brüche*[19] zu $\mathbb{Z}$ hinzunehmen und erhält damit die Menge der *rationalen Zahlen*[20]

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{n}{m} \middle| n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\} \ .$$

Der Bruch $\frac{n}{m}$ steht als Abkürzung für „n geteilt durch m". Wir schreiben auch n/m oder $n \div m$. Die Zahl n heißt der *Zähler*[21] und m der *Nenner*[22] von $\frac{n}{m}$. Die Additionsregel und die Multiplikationsregel für die rationalen Zahlen

$$\frac{n}{m} + \frac{k}{j} = \frac{nj + mk}{mj} \tag{1.12}$$

und

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{k}{j} = \frac{nk}{mj} \tag{1.13}$$

sowie die Subtraktionsregel und die Divisionsregel

$$\frac{n}{m} - \frac{k}{j} = \frac{nj - mk}{mj} \tag{1.14}$$

und

$$\frac{n}{m} \Big/ \frac{k}{j} = \frac{\frac{n}{m}}{\frac{k}{j}} = \frac{nj}{mk} \tag{1.15}$$

sind durch Erweiterung der entsprechenden Regeln in $\mathbb{Z}$ eindeutig festgelegt, wobei die Zahl $n \in \mathbb{Z}$ mit dem Bruch $\frac{n}{1} \in \mathbb{Q}$ identifiziert wird. Aus der Additionsregel (1.12) folgt für $k = 0$, daß

$$\frac{n}{m} = \frac{nj}{mj} \tag{1.16}$$

für alle $j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt: Enthalten der Zähler nj und der Nenner mj einer rationalen Zahl q einen gemeinsamen Faktor j, so können wir q *kürzen* und den gemeinsamen Faktor weglassen.

[18]Englisch: set of integers
[19]Englisch: fractions
[20]Englisch: set of rational numbers
[21]Englisch: numerator
[22]Englisch: denominator

Sitzung 1.4 In DERIVE kann man mit rationalen Zahlen arbeiten, deren Zähler und Nenner beliebige Länge haben, insbesondere also auch mit beliebig großen ganzen Zahlen. Das hatten wir bereits bei der Auswertung von 50! gesehen. DERIVE führt mit rationalen Zahlen exakte Berechnungen durch, und `Simplify` überführt diese dann in eine gekürzte Form. Man gebe noch einmal `50!` ein. Zuerst wollen wir die Faktoren dieser Zahl mit Hilfe des `Factor` Menüs untersuchen. Wir erhalten

$$2: \qquad 2^{47}3^{22}5^{12}7^{8}11^{4}13^{3}17^{2}19^{2}23^{2}29\ 31\ 37\ 41\ 43\ 47$$

und sehen, daß 50! den Faktor 2 insgesamt 47-mal enthält, 22-mal der Faktor 3 vorkommt usw. Außerdem sehen wir, daß die *Primzahlen* bis 50 – also die Zahlen, die keine nichttriviale Faktorisierung haben –, gerade die Zahlen $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43$ und 47 sind (warum?). Wir erzeugen nun den Bruch $\frac{12345}{50!}$ durch Eingabe von `12345/#1` (falls 50! die Zeilennummer 1 hat) und erhalten zunächst

$$3: \qquad \frac{12345}{50!}\ .$$

`Simplify` erzeugt daraus den gekürzten Bruch

$$4: \qquad \frac{823}{2027606213447558536240840544404317922958509437930700800000000000}\ .$$

Wir kommen nun zu der Menge der *reellen Zahlen*[23] $\mathbb{R}$. Es stellte sich heraus, daß es sehr schwierig ist, von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ kommen. Es lagen 20 Jahrhunderte zwischen der Erkenntnis, daß es nicht-rationale Zahlen gibt, und der Lösung dieses Erweiterungsproblems.

Die Notwendigkeit, Erweiterungen von $\mathbb{N}_0$ zu $\mathbb{Z}$ und schließlich zu $\mathbb{Q}$ zu bilden, ergab sich aus der Tatsache, daß die lineare Gleichung

$$m \cdot x + n = 0 \tag{1.17}$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $m = 1$ keine Lösung $x \in \mathbb{N}_0$ besitzt. Darüberhinaus besitzt sie für $m, n \in \mathbb{Z}$ im allgemeinen keine Lösung $x \in \mathbb{Z}$. Wir wissen jedoch, daß die Gleichung (1.17) für alle $n, m \in \mathbb{Q}$, $m \neq 0$ die eindeutige Lösung $x = -n/m \in \mathbb{Q}$ hat.

Beispiel 1.3 (Eine nicht-rationale Zahl) Die griechischen Mathematiker wußten, daß die quadratische Gleichung

$$x^2 = 2 \tag{1.18}$$

keine Lösung $x \in \mathbb{Q}$ hat. Wir wollen dies nun zeigen. Wir nehmen an, es gäbe eine rationale Lösung ($n, m \in \mathbb{Z}$)

$$x = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$$

von Gleichung (1.18) und zeigen, daß dies zu einem Widerspruch führt. Wir wollen voraussetzen, daß n und m keinen gemeinsamen Faktor besitzen, da dieser gekürzt werden kann[24]. Es gilt dann definitionsgemäß

[23] Englisch: set of real numbers

[24] Die Schreibweise $\stackrel{(1.13)}{=\!=}$ deutet an, daß wir Gleichung (1.13) verwendet haben, um zur rechten

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2 \overset{(1.13)}{=\!=} \frac{n^2}{m^2} = 2$$

oder (wenn wir beide Seiten mit m^2 multiplizieren)

$$n^2 = 2\,m^2 \; . \tag{1.19}$$

Daraus sehen wir, daß n^2 eine gerade Zahl[25] ist, da sie 2 als Faktor besitzt. Auf der anderen Seite sind die Quadrate ungerader Zahlen[26] immer ungerade,[27] so daß n selbst gerade sein muß. Also hat n den Faktor 2, d. h.

$$n = 2\,l$$

für ein $l \in \mathbb{Z}$. Wir setzen das nun in Gleichung (1.19) ein und erhalten daraus

$$(2\,l)^2 = 4\,l^2 = 2\,m^2$$

oder (wenn wir beide Seiten durch 2 teilen)

$$2\,l^2 = m^2 \; .$$

Somit ist m^2 gerade. Daraus folgt wie oben, daß m selbst eine gerade Zahl ist. Wir haben nun also gezeigt, daß sowohl n als auch m gerade sind, obwohl wir vorausgesetzt hatten, daß sie keinen gemeinsamen Faktor besitzen. Dies ist ein Widerspruch! Wir haben zwei Zahlen ohne gemeinsamen Faktor gefunden, die beide den Faktor 2 besitzen. Die einzige Schlußfolgerung aus dieser Situation ist, daß unsere Annahme, daß es eine rationale Lösung von Gleichung (1.18) gibt, falsch sein muß.

Dies war ein Beispiel für einen *Beweis durch Widerspruch*. $\triangle$

Der Wunsch, Gleichung (1.18) lösen zu können, macht die *Erweiterung von* $\mathbb{Q}$ notwendig. Die Schwierigkeiten der Erweiterung von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{R}$ läßt es angemessener erscheinen, $\mathbb{R}$ unabhängig von $\mathbb{Q}$ durch *Axiome* zu definieren, die die üblichen Regeln für Addition, Multiplikation und einer Anordnung auf $\mathbb{R}$ festlegen. Dies soll nun geschehen.

Wir erklären $\mathbb{R}$ als eine Menge mit den beiden Operationen *Addition* $(+)$ und *Multiplikation* $(\cdot)$, so daß für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Zahlen $x+y$ und $x \cdot y$ Elemente von $\mathbb{R}$ sind und für diese die folgenden Regeln gelten (wobei x, y, z für beliebige Elemente aus $\mathbb{R}$ stehen):

Regeln für die Addition:

REGEL 1: (Assoziativgesetz der Addition)

$$x + (y + z) = (x + y) + z \; .$$

Seite zu kommen.

[25] Englisch: even number

[26] Englisch: odd number

[27] Dies ist eine Nebenrechnung, die man bitte überprüfen möge!

REGEL 2: (Neutrales Element der Addition)
Es gibt eine Zahl $0 \in \mathbb{R}$ (Null), so daß gilt

$$x + 0 = x \; .$$

REGEL 3: (Additives Inverses)
Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es ein additives Inverses $(-x) \in \mathbb{R}$, so daß

$$x + (-x) = 0 \; .$$

REGEL 4: (Kommutativgesetz der Addition)

$$x + y = y + x \; .$$

Regeln für die Multiplikation:

REGEL 5: (Assoziativgesetz der Multiplikation)

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \; .$$

REGEL 6: (Neutrales Element der Multiplikation)
Es gibt eine Zahl $1 \in \mathbb{R}$ (Eins), $1 \neq 0$, derart, daß für alle $x \neq 0$ gilt

$$x \cdot 1 = x \; .$$

REGEL 7: (Multiplikatives Inverses)
Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt es ein multiplikatives Inverses $\frac{1}{x} \in \mathbb{R}$, so daß

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1 \; .$$

REGEL 8: (Kommutativgesetz der Multiplikation)

$$x \cdot y = y \cdot x \; .$$

Man sieht, daß die Regeln 1–4 den Regeln 5–8 entsprechen.

Man sagt, $\mathbb{R}$ sei eine *Gruppe* bezüglich der Addition (Regeln 1–4); dementsprechend ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Gruppe bezüglich der Multiplikation (Regeln 5–8). Eine Menge, die diese beiden Eigenschaften hat und zudem das Distributivgesetz

REGEL 9: (Distributivgesetz)

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

erfüllt, nennt man einen *Körper*[28]. Somit ist $\mathbb{R}$ ein Körper bezüglich der beiden Operationen $(+)$ und $(\cdot)$.

[28] Englisch: field

Wir bemerken, daß in $\mathbb{Q}$ diese Regeln auch erfüllt sind. Somit ist $\mathbb{Q}$ ebenfalls ein Körper bezüglich $(+)$ und $(\cdot)$.

Statt $x + (-y)$ schreibt man auch $x - y$ und statt $x \cdot \frac{1}{y}$ schreibt man $\frac{x}{y}$ oder x/y. Die Zahl $-x$ heißt das *Negative* von x und $\frac{1}{x}$ ist der *Kehrwert*[29] von x. Die arithmetischen Regeln (1.12)–(1.16) für rationale Zahlen können aus den Regeln 1–9 abgeleitet werden und gelten auch in $\mathbb{R}$.

Auf Grund der Regeln 1 und 4 haben alle Arten, auf die drei reelle Zahlen x, y und z summiert werden können – also $(x+y)+z$, $x+(y+z)$, $(x+z)+y$, $x+(z+y)$, $(y+x)+z$, $y+(x+z)$, $(y+z)+x$, $y+(z+x)$, $(z+x)+y$, $z+(x+y)$, $z+(y+x)$ und $(z+y)+x$ – denselben Wert. Wir können die Summe somit abkürzend als $x+y+z$ schreiben. Durch das Induktionsprinzip gilt dasselbe für eine endliche Anzahl n reeller Zahlen x_k $(k = 1, \ldots, n)$, und es ist gerechtfertigt, $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ zu schreiben. Wegen der Regeln 5 und 8 gilt das gleiche für Produkte.

Die folgenden Regeln für *Doppelsummen* können mittels Induktion aus dem Assoziativ-, dem Kommutativ- und dem Distributivgesetz hergeleitet werden:[30]

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} x_{jk}\right) = \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} x_{jk}\right) =: \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{jk} \tag{1.20}$$

und

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\sum_{j=1}^{m} y_j\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} y_j\right) x_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} y_j x_k\ . \tag{1.21}$$

Wie für die ganzen Zahlen definiert man die Potenzen reeller Zahlen durch Gleichung (1.7).

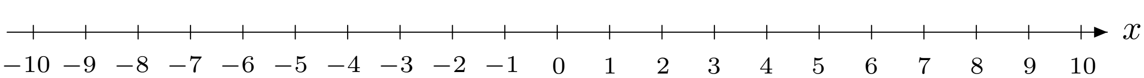

Abbildung 1.3 Die Zahlengerade zur Darstellung der reellen Zahlen

Für gewöhnlich identifizieren wir $\mathbb{R}$ mit einer Geraden, z. B. der x-Achse eines Koordinatensystems. Punkte auf einer Geraden unterliegen einer natürlichen Ordnung: der Richtung der Achse. Für zwei Punkte auf der Geraden ist es immer eindeutig, welcher links und welcher rechts liegt. Ist unsere Gerade die x-Achse, deren Richtungspfeil nach rechts zeigt, und der Punkt x liegt links vom Punkt y, dann sagen wir „*x ist kleiner als y*" bzw. „*y ist größer als x*", und wir schreiben dies als $x < y$ bzw. $y > x$. Gilt $x < y$ oder $x = y$, so schreiben wir $x \leq y$ bzw. $y \geq x$ und sagen „x ist kleiner oder gleich y" bzw. „y ist größer oder gleich x". Wenn entweder $x < y$ oder $x > y$ gilt, dann sagen wir „x ist ungleich y" und schreiben dafür $x \neq y$.

[29] Englisch: reciprocal

[30] Das Symbol =: bedeutet, daß das Objekt auf der rechten Seite durch die linke Seite definiert wird.

Ordnungsregeln:

Es gibt eine Operation $<$ („kleiner”), derart, daß

REGEL 10: (Trichotomie)
für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\text{entweder} \quad x < y \quad \text{oder} \quad x = y \quad \text{oder} \quad x > y \quad \text{gilt.}$$

REGEL 11: (Transitivität)

$$x < y \quad \text{und} \quad y < z \quad \Rightarrow \quad x < z\ .$$

REGEL 12: (Monotonie)

(a)
$$x < y \quad \Rightarrow \quad x + z < y + z$$

und

(b)
$$(x < y \quad \text{und} \quad z > 0) \quad \Rightarrow \quad xz < yz\ .$$

Wir sagen, daß $\mathbb{R}$ ein *angeordneter Körper* ist, da er den Regeln 10–12 gehorcht. Somit ist $\mathbb{Q}$ ebenfalls ein angeordneter Körper, und es gibt (wenigstens) eine weitere Regel für $\mathbb{R}$, die den Unterschied zwischen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ präzisiert, auf die wir später eingehen werden.

Die Ordnung auf $\mathbb{R}$ teilt die reelle Achse in zwei Teile. Die Zahlen auf der rechten Seite der Null heißen *positive reelle Zahlen* und werden mit $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ bezeichnet. Die Zahlen auf der linken Seite heißen *negative reelle Zahlen*.

Wenn wir an späterer Stelle in diesem Buch mit Ungleichungen arbeiten, werden wir wesentlich mehr Regeln benötigen. Wir stellen einige davon hier vor und beweisen, daß sie aus den Regeln 1–12 abgeleitet werden können.

Satz 1.1 (Ordnungsregeln) Die folgenden Regeln gelten für alle $x, y \in \mathbb{R}$:[31]

(a) ist $x < y$, dann ist $-x > -y$,

(b) ist $x \neq 0$, dann ist $x^2 > 0$,

(c) $1 > 0$,

(d) ist $x > 0$, dann ist $\frac{1}{x} > 0$,

(e) ist $0 < x < y$, dann ist $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$,

(f) ist $x < y$, dann ist $x < \frac{1}{2}(x + y) < y$.

[31] Die in (e) auftretende Ungleichungskette $0 < x < y$ ist eine Abkürzung für die beiden Ungleichungen $0 < x$ und $x < y$. Man mache sich klar, daß Ungleichungsketten nur wegen der Transitivität sinnvoll sind.

Beweis:

(a) Gilt $x < y$, dann ergibt sich mit Regel 12 (a):
$x + (-x - y) = -y < y + (-x - y) = -x$,

(b) $x > 0 \overset{\text{(Regel 12(b))}}{\Longrightarrow} x \cdot x > 0$ und

$x < 0 \overset{\text{(Regel 12(a))}}{\Longrightarrow} -x > 0 \overset{\text{(Regel 12(b))}}{\Longrightarrow} (-x) \cdot (-x) = x^2 > 0$,

(c) wähle $x = 1$ in (b) ,

(d) wäre $\frac{1}{x} \leq 0$, so wäre $1 = x \cdot \frac{1}{x} \leq 0$, ein Widerspruch,

(e) multipliziert man $x < y$ mit $\frac{1}{xy} > 0$, so folgt $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$,

(f) $x < y \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \overset{(x<y)}{<} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \overset{(x<y)}{<} \frac{y}{2} + \frac{y}{2} = y$. □

Definition 1.5 (Arithmetisches Mittel) Der Wert $\frac{1}{2}(x+y)$ heißt *arithmetischer Mittelwert*[32] von x und y. △

Wegen Satz 1.1 (e) liegt das arithmetische Mittel zweier reeller (rationaler) Zahlen zwischen diesen, so daß zwischen zwei beliebigen reellen (rationalen) Zahlen immer eine weitere reelle (rationale) Zahl liegt. Aus der wiederholten Fortsetzung dieses Prozesses folgt, daß zwischen zwei beliebigen reellen (rationalen) Zahlen immer unendlich viele andere reelle (rationale) Zahlen liegen.

Definition 1.6 (Intervall) Ein *Intervall* ist ein Abschnitt reeller Zahlen, die zwischen zwei reellen Zahlen $a \leq b$ liegen. Man schreibt

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \ , \qquad (a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \ ,$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \ , \qquad [a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \ .$$

Ein Intervall der Form $[a, b]$ heißt *abgeschlossen*[33], (a, b) heißt *offen*[34], während $(a, b]$ und $[a, b)$ *halboffen* genannt werden. Insbesondere gilt $[a, a] = \{a\}$ und $(a, a] = [a, a) = (a, a) = \emptyset$. Die Differenz $b - a$ ist ein Maß für die *Länge* eines Intervalls I, die wir auch mit $|I|$ abkürzen. Geometrisch betrachtet ist dies der *Abstand* zwischen dem oberen und dem unteren Endpunkt des Intervalls. *Unendlich*[35] (dafür schreiben wir ∞) ist als Grenze eines halboffenen Intervalls zulässig, so daß z. B. gilt

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \ .$$

Man beachte, daß ∞ keine reelle Zahl, sondern nur ein Symbol ist.

[32] Englisch: arithmetic mean value
[33] Englisch: closed interval
[34] Englisch: open interval
[35] Englisch: infinity

Definition 1.7 (Betrag und Vorzeichen) Der Abstand zwischen einer reellen Zahl x und 0 auf der Zahlengeraden heißt der *Betrag*[36] von x, wofür wir auch $|x|$ schreiben. Der Betrag ist also definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{sonst} \end{cases} . \tag{1.22}$$

Die *Vorzeichenfunktion* sign zeigt an, ob eine reelle Zahl positiv oder negativ ist und wird definiert durch

$$\operatorname{sign} x := \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} . \tag{1.23}$$

Man zeige, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ die Beziehung $x = \operatorname{sign} x \cdot |x|$ gilt!

Beispiel 1.4 (Dreiecksungleichung) Eine für die Analysis äußerst wichtige Eigenschaft der Betragsfunktion ist die sogenannte *Dreiecksungleichung*[37], deren Bezeichnung erst in § 2.1 klarwerden wird. Sie besagt, daß für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$|x + y| \leq |x| + |y| \tag{1.24}$$

gilt. Dies zeigt man leicht durch eine Fallunterscheidung: Ist eine der beiden Zahlen x oder y gleich Null, so gilt in Ungleichung (1.24) sogar die Gleichheit. Sind x und y beide positiv oder beide negativ, so gilt ebenfalls die Gleichheit in (1.24). Ist aber z. B. $x > 0$, aber $y < 0$, so gilt

$$|x + y| = \Big||x| - |y|\Big| = \left\{ \begin{array}{ll} |x| - |y| & \text{falls } |x| \geq |y| \\ |y| - |x| & \text{falls } |x| < |y| \end{array} \right\} \leq |x| + |y| ,$$

was den Beweis der Dreiecksungleichung vervollständigt. △

Neben der Darstellung durch Brüche gibt es eine weitere Möglichkeit, rationale Zahlen zu repräsentieren. Diese kommt vom *Divisionsalgorithmus* und heißt *Dezimaldarstellung*. Beispielsweise ergibt der Divisionsalgorithmus

$$\frac{25}{2} = 25/2 = 12.5 ,$$

welches eine Abkürzung für $12.5000\ldots = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot \frac{1}{10} + 0 \cdot \frac{1}{100} + \cdots$ ist. Ein weiteres Beispiel ist

$$64/3 = 21.333\ldots = 2 \cdot 10 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{100} + 3 \cdot \frac{1}{1000} + \cdots .$$

[36] Englisch: absolute value, modulus
[37] Englisch: triangle inequality

Mit dem Divisionsalgorithmus kann man zeigen, daß rationale Zahlen eine *periodische* Dezimaldarstellung besitzen. Das heißt, es gibt in der Darstellung einen Abschnitt, der sich fortlaufend wiederholt. Es zeigt sich, daß nicht-rationale Zahlen auch eine Dezimaldarstellung besitzen – mit dem Unterschied, daß diese nicht periodisch ist.

Wir werden uns nun diesen Unterschied zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ genauer ansehen. Wir haben gesehen, daß es keine rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$ gibt. In $\mathbb{R}$ gibt es für jedes $y \in \mathbb{R}^+$ eine positive Zahl $x \in \mathbb{R}^+$, für die $x^2 = y$ gilt. Diese Zahl heißt die *Quadratwurzel*[38] von y. Wir schreiben sie als $x = \sqrt{y}$.

Was wir von $x = \sqrt{2}$ wissen, ist die definierende Gleichung $x^2 = 2$. Aus ihr können wir eine rationale *Approximation* gewinnen: Hat man einen Schätzwert x_0 für $\sqrt{2}$ mit $x_0^2 < 2$, dann weiß man, daß $x_0 < x$ ist, und gilt $x_0^2 > 2$, dann ist $x_0 > x$, da für $x > 0$

$$x < y \iff x^2 < y^2 \tag{1.25}$$

gilt (man beweise dies durch Anwendung der Regeln 1–12!). Wir zeigen nun, wie man zu einer beliebig genauen Näherung für $\sqrt{2}$ kommt.

Sitzung 1.5 Wir benutzen DERIVE, um zu einer rationalen Näherung für $\sqrt{2}$ zu gelangen. Wegen $1 < 2 < 4$ weiß man, daß $1 < \sqrt{2} < \sqrt{4} = 2$ gilt. Wir schätzen, daß 1.4^2 nahe bei 2 liegt. Deshalb wenden wir die `Simplify` Prozedur auf `1.4^2` an und erhalten als Ergebnis $\frac{49}{25}$. Wie wir schon betont haben, führt DERIVE exakte Berechnungen mit rationalen Zahlen durch und stellt diese als Brüche dar. Um mit Dezimaldarstellungen zu arbeiten, verwendet man `approX` statt `Simplify`. Auf diese Weise erhält man 1.96, was offensichtlich kleiner als 2 ist. 1.5^2 ergibt 2.25, was größer als 2 ist, so daß $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$ gilt. Wir berechnen nun die nächste Dezimale, indem wir die Näherungen $1.41^2 = 1.9881$ und $1.42^2 = 2.0164$ verwenden. Die dritte Dezimale erhalten wir aus den Berechnungen $1.411^2 = 1.99092$, $1.412^2 = 1.99374$, $1.413^2 = 1.99656$, $1.414^2 = 1.99939$ und $1.415^2 = 2.00222$. Schließlich erhalten wir die vierte Dezimale mit $1.4141^2 = 1.99967$, $1.4142^2 = 1.99996$ und $1.4143^2 = 2.00024$. Also haben wir schließlich $1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143$.
DERIVE kennt die Quadratwurzelfunktion unter dem Namen `SQRT`.[39] Sie kann auch durch die Tastenkombination `<ALT>Q` eingegeben werden. Wendet man z. B. `approX` auf `SQRT(2)` (oder auch `SQRT 2`) an, so erhält man 1.41421 als Näherung für $\sqrt{2}$. (Man beachte, daß `Simplify` den Ausdruck `SQRT(2)` symbolisch beläßt.)
Die Genauigkeit bei der Arithmetik mit reellen Zahlen ist bei DERIVE auf 6 Stellen voreingestellt. Sie kann mit dem Befehl `Options Precision Digits` verändert werden. Wir geben 60 als neuen Wert für die Stellenzahl ein.
Mit den *Cursortasten* kann man in dem Fenster, in dem unsere Ausdrücke stehen, von Ausdruck zu Ausdruck springen. Wir gehen mit der Cursortaste `<UP>` (Aufwärtscursortaste) zu $\sqrt{2}$ zurück und benutzen dann das `approX` Kommando.[40] Dies führt zum Ergebnis

$$1.41421356237309504880168872420969807856967187537694807317667\,.$$

[38] Englisch: square root

[39] Wir erinnern daran, daß Funktionen in DERIVE groß geschrieben werden, jedoch auch in Kleinbuchstaben eingegeben werden können.

[40] Man achte darauf, nicht versehentlich die 6-stellige Näherung von $\sqrt{2}$ zu `approX` imieren!

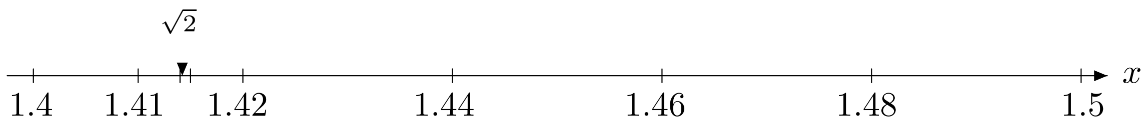

Abbildung 1.4 Die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ auf der Zahlengeraden

Eine reelle Zahl, die nicht rational ist, wird *irrational* genannt. $\sqrt{2}$ ist ein Beispiel einer irrationalen Zahl.

Daß man durch Approximationsverfahren wie in DERIVE-Sitzung 1.5 tatsächlich immer reelle Zahlen erzeugt, ist eine fundamentale Eigenschaft von $\mathbb{R}$, mit der wir uns in § 1.5 ausführlich beschäftigen werden.

Übungsaufgaben

1.10 *Zeige, daß $\sqrt{3}$ irrational ist.* Hinweis: *Passe den Beweis für $\sqrt{2}$ an.*

◇ **1.11** *Berechne $\sqrt{3}$ durch wiederholtes Quadrieren mit* DERIVE *auf vier Stellen genau, und gib die entsprechende Folge ineinander geschachtelter Intervalle an. Berechne dann $\sqrt{3}$ in einem Schritt auf* 60 *Dezimalen genau.*

★ **1.12** *Zeige, daß die Lösungen der quadratischen Gleichung $ax^2+bx+c=0$ irrational sind, falls die Koeffizienten a, b, c ungerade ganze Zahlen sind.*

1.13 (Dreiecksungleichung) *Zeige, daß für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die Ungleichung*

$$|x-y| \geq \Big||x|-|y|\Big|$$

gilt.

1.14 (Dreiecksungleichung) *Zeige durch Induktion, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_k \in \mathbb{R}$ $(k=1,\ldots,n)$ gilt*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \, .$$

◇ **1.15** *Wie erwähnt, haben rationale Zahlen periodische Dezimaldarstellungen. Bestimme die Perioden der rationalen Zahlen*

$$\frac{1}{7}, \qquad \frac{2}{7}, \qquad \frac{4}{13}, \qquad \frac{3}{2}, \qquad \frac{2}{9}, \qquad \frac{100}{81}, \qquad \frac{123}{456}$$

mit DERIVE. *Dazu verwende man eine genügend große Genauigkeit* `Options Precision Digits` *. Durch Beobachten einer Periode ist natürlich kein Beweis für ihre Gültigkeit erbracht, da bei genauerer Rechnung die Periodizität wieder verschwinden könnte. Wie kann man die periodische Darstellung – einmal beobachtet – trotzdem beweisen? Man beweise alle beobachteten Perioden mit* DERIVE.

1.4 Variablen, Gleichungen und Ungleichungen

Eine *Variable* ist ein Symbol, das als Platzhalter für Zahlen verwendet wird. Eine *reelle Variable* ist eine Variable, die eine reelle Zahl repräsentiert. Für reelle Variablen benutzen wir oft die Buchstaben x, y und z. Wir werden aber auch andere Symbole wie x_1, x_2 und x_3 verwenden. Als *ganzzahlige Variablen* benutzen wir gewöhnlich die Symbole j, k, l, m und n.

In diesem Kapitel haben wir schon Gleichungen benutzt. Eine *Gleichung*[41] ist ein Ausdruck der Form LS = RS (Linke Seite = Rechte Seite), wobei LS und RS irgendwelche Ausdrücke sind. Wir werden ein solches Objekt auch dann als Gleichung bezeichnen, wenn diese nicht *wahr*[42] ist. Meist enthält eine Gleichung Variablen und wird nur dann wahr, wenn man bestimmte Werte für die Variablen *einsetzt* (*substituiert*).

Um eine Gleichung zu *lösen*[43], muß man diejenigen Einsetzungen finden, für die die Gleichung wahr ist. Zum Beispiel ist die Gleichung

$$3\,x = 5$$

genau dann wahr, wenn wir $\frac{5}{3}$ für x einsetzen. Die Gleichung lautet dann

$$3 \cdot \frac{5}{3} = 5 \; .$$

Es gibt auch Gleichungen, die nie wahr sind wie z. B. die Gleichung

$$x = x + 1 \; .$$

Eine Gleichung verändert ihren Wahrheitsgehalt nicht, wenn man auf beiden Seiten der Gleichung denselben Ausdruck addiert oder subtrahiert, mit demselben Ausdruck multipliziert oder durch denselben Ausdruck dividiert. Das gleiche gilt, wenn man von beiden Seiten das Negative nimmt oder den Kehrwert bildet. Man muß nur darauf achten, daß keine Division durch Null auftritt, da unsere Regeln für $\mathbb{R}$ eine Division durch 0 nicht zulassen.

Als Beispiel betrachten wir die Gleichung

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{x-x^2} \; . \tag{1.26}$$

Bildet man auf beiden Seiten den Kehrwert, so erhält man

$$1 - x = x - x^2 \; , \tag{1.27}$$

und die Subtraktion von $x - x^2$ ergibt rechts 0 und links

$$1 - x - (x - x^2) = 1 - x - x + x^2 = 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2 \; . \tag{1.28}$$

[41] Englisch: equation
[42] Englisch: true
[43] Englisch: solve

Der letzte Ausdruck ist offensichtlich genau dann Null, wenn $x = 1$ ist.

Wir fragen uns also, ob $x = 1$ eine Lösung der Gleichung (1.26) ist. Setzt man den Wert 1 für x in Gleichung (1.26) ein, so erhält man den nicht zulässigen Ausdruck

$$\frac{1}{0} = \frac{1}{0} \,,$$

der deshalb auch nicht wahr ist. Dies liegt an der Division durch 0. Auf der anderen Seite ist $x = 1$ eine Lösung von Gleichung (1.27).

In DERIVE-Sitzung 13.4 im Anhang (Kapitel 13) wird das Lösen von Gleichungen mit DERIVE behandelt.

Eine *Ungleichung*[44] ist ein Ausdruck der Form LS $\leq$ RS, oder ein ensprechender Ausdruck mit $\geq, <$ oder $>$ statt $\leq$.

Die Regeln 11 und 12 stellen erlaubte Regeln zur Umformung von Ungleichungen dar. So darf man eine reelle Zahl auf beiden Seiten addieren. Außerdem darf man auf beiden Seiten mit einer positiven reellen Zahl multiplizieren, ohne daß sich die Gültigkeit der Ungleichung ändert. Multiplikation mit einer negativen Zahl hingegen ändert die Richtung des Ungleichungssymbols. (Dies war der Inhalt von Satz 1.1 (a). Man schaue sich den Satz nochmals an!)

Sitzung 1.6 DERIVE ist in der Lage, sowohl Gleichungen als auch Ungleichungen zu bearbeiten. Zunächst wollen wir die quadratische Gleichung `ax^2+bx+c=0` lösen. Dazu geben wir den Ausdruck ein und benutzen das `soLve` Menü. DERIVE antwortet mit

$$2: \qquad x = \frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)} - b}{2a}$$

$$3: \qquad x = -\frac{\sqrt{(b^2 - 4ac)} + b}{2a} \,,$$

was die Lösung einer allgemeinen quadratischen Gleichung darstellt. Mit dieser Formel sollte man vertraut sein.

Wir wollen nun die Ungleichung $ax \geq 1$ nach x auflösen. Dazu geben wir den Ausdruck `ax>=1` ein und wählen dann das `soLve` Menü. Als Auflösung dieser Ungleichung nach der Variablen x gibt DERIVE

$$5: \qquad x \,\mathtt{SIGN}\,(a) \geq \frac{1}{|a|}$$

aus. DERIVE benutzt also auch die Betragsfunktion $|a|$ (der entsprechende Eingabebefehl ist `ABS(a)` oder auch `|a|`) sowie die Vorzeichenfunktion `SIGN(a)`[45]. Man interpretiere DERIVEs Ausgabe!

[44] Englisch: inequality

[45] Die `SIGN` Funktion von DERIVE unterscheidet sich etwas von unserer Definition, da sie für $x = 0$ *undefiniert* ist.

Will man die Ungleichung weiter vereinfachen, muß man DERIVE mitteilen, ob a positiv oder negativ ist. Für gewöhnlich nimmt DERIVE an, daß jede verwendete Variable reell ist. Wir wollen nun a mit Hilfe des `Declare Variable Domain` Befehls als positive Variable deklarieren. Auf die Anfrage nach dem Definitionsbereich (`Domain`) `DECLARE VARIABLE: Domain: Positive Nonnegative Real Complex Interval` geben wir `P` für `Positive` ein. Diese Vorgehensweise deklariert a als positive Variable. Schließlich vereinfachen wir mit `Simplify` das obige Ergebnis und erhalten so das gewünschte Resultat

$$6: \qquad x \geq \frac{1}{a} .$$

Als nächstes wollen wir eine Erweiterung der Formel $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ für höhere Exponenten bestimmen. Wir geben dazu den Ausdruck `(a+b)^n` ein. Das Ausmultiplizieren eines Produkts, z. B. die Umformung $(a + b)^2$ zur Summe $a^2+2ab+b^2$, nennt man *Expansion*, während die umgekehrte Umformung *Faktorisierung* heißt. Man versuche, den Ausdruck mit dem `Expand` Menü zu expandieren. DERIVE fragt dann nach den Variablen, nach denen expandiert werden soll. Geben wir `<ENTER>` auf diese Nachfrage ein, so wird versucht, nach allen Variablen zu expandieren. DERIVE kann diese Aufgabe nicht lösen und gibt die Eingabeformel als Antwort zurück.

Wir hoffen, daß DERIVE die Aufgabe für eine *feste* natürliche Zahl n lösen kann, und wollen dies nun ausprobieren. Dazu verwenden wir die `VECTOR` Prozedur. Die Eingabe von `VECTOR(#7,n,0,5)` erzeugt die Liste von Formeln, die man erhält, wenn man in unseren Ausdruck für n nacheinander die Werte $0, \ldots, 5$ einsetzt. `Expand` erzeugt das Ergebnis

$$10: \qquad \left[1, a+b, a^2+2ab+b^2, a^3+3a^2b+3ab^2+b^3, a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4, \ldots\right] .$$

Wir können jedoch nicht alles sehen, da nicht das gesamte Ergebnis auf den Bildschirm paßt. Um die Unterausdrücke auf den Bildschirm zu bringen, kann man mit der `<DOWN>`-Taste (Abwärtscursortaste) oder der `<RIGHT>`-Taste (Rechtscursortaste) den *ersten Unterausdruck* markieren. Mit `<RIGHT>` kommt man zum *nächsten Unterausdruck*. Entsprechend erhält man mit der `<LEFT>`-Taste (Linkscursortaste) den vorhergehenden Unterausdruck. Man vergleiche die Einträge im Pascalschen Dreieck mit den gefundenen Koeffizienten!

Es spricht einiges für die Tatsache, daß diese Koeffizienten tatsächlich die Binomialkoeffizienten sind. Wir lassen DERIVE die Vermutung für $n = 0, \ldots, 5$ überprüfen. Der Ausdruck `VECTOR(SUM(COMB(n,k)*a^k*b^(n-k),k,0,n),n,0,5)` erzeugt die vermutete Formel. Man vergleiche mit Zeile 10!

Beispiel 1.5 (Binomischer Lehrsatz) Die oben erwähnten Fälle werden durch die wichtige Gleichung

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \qquad (n \in \mathbb{N}_0) \tag{1.29}$$

erfaßt, die für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt. Diese Gleichung heißt *Binomischer Lehrsatz*. Wir werden ihn nun durch Induktion beweisen. (Man beachte, daß obiger Beweis mit DERIVE natürlich nur für $n = 0, \ldots, 5$ gilt.)

Wir wollen zuerst den Spezialfall $b := x$ und $a := 1$ betrachten

$$A(n): \qquad (1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n\,. \tag{1.30}$$

Der Induktionsanfang $A(0)$ ist trivial. Wir nehmen nun an, daß $A(n)$ gilt und müssen $A(n+1)$ zeigen[46]. Aus der Induktionsvoraussetzung erhalten wir zunächst

$$x(1+x)^n = x + \binom{n}{1}x^2 + \binom{n}{2}x^3 + \cdots + \binom{n}{n}x^{n+1}$$

und folglich

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)\cdot(1+x)^n = (1+x)^n + x(1+x)^n \\
&\overset{(A(n))}{=\!=} 1 + \left(\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right)x + \left(\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right)x^2 + \cdots \\
&\quad + \left(\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right)x^n + x^{n+1} \\
&\overset{(1.6)}{=\!=} 1 + \binom{n+1}{1}x + \binom{n+1}{2}x^2 + \cdots + \binom{n+1}{n}x^n + x^{n+1}\,,
\end{aligned}$$

wobei wir die Eigenschaft der Binomialkoeffizienten verwendet haben, durch welche das Pascalsche Dreieck definiert worden war. Die resultierende Gleichung ist gerade der Inhalt von $A(n+1)$, so daß der Beweis damit vollständig ist. Gleichung (1.30) gilt also für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Schließlich erhalten wir Gleichung (1.29) für $a \neq 0$ durch die Rechnung

$$(a+b)^n = a^n \cdot \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \overset{(x:=b/a)}{=\!=} a^n \cdot \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{b^k}{a^k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

unter Anwendung von Gleichung (1.30). Für $a = 0$ ist (1.29) trivialerweise richtig.

Beispiel 1.6 (Bernoullische Ungleichung) Eine der wichtigsten Ungleichungen der Analysis ist die *Bernoullische*[47] *Ungleichung*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad (n \in \mathbb{N}_0,\ \ x \geq -1)\,. \tag{1.31}$$

Für $x \geq 0$ folgt sie sofort aus dem Binomischen Lehrsatz, sie ist aber vor allem wichtig für $x \in (-1, 0)$. Wir beweisen sie durch Induktion nach n. Der Induktionsanfang für $n = 0$ ist die Ungleichung $1 \geq 1$, welche offenbar richtig ist. Gilt als Induktionsvoraussetzung (1.31) für n, so folgt für $n+1$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)\cdot(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x\,.$$

[46] Wenn wir bisher der Übersichtlichkeit halber den Induktionsschritt noch mit N statt mit n durchgeführt haben, so werden wir von nun an der Einfachheit halber auf diese Umbenennung verzichten.

[47] Jakob I. Bernoulli [1654–1705]

Übungsaufgaben

1.16 *Zeige, daß die Gleichung*

$$(x_1^2 + x_2^2) \cdot (y_1^2 + y_2^2) = (x_1 y_1 + x_2 y_2)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2$$

für $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ gilt.

◇ **1.17** *Überprüfe die Gleichung*

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} (x_k y_j - x_j y_k)^2 \tag{1.32}$$

($x_k, y_k \in \mathbb{R}$, $(k = 1, \ldots, n)$) mit Derive *für $n = 2, \ldots, 6$.* Hinweis: *Man deklariere x und y als Funktionen von k mit Hilfe des* `Declare Function` *Menüs und gebe* `<ENTER>` *auf* Derives *Frage* `DECLARE FUNCTION: value` *ein. Dadurch deklariert man x und y als willkürliche Funktionen ohne vordefinierten Wert. Schreibe nun $x(k)$ und $y(k)$, bzw. $x(j)$ und $y(j)$ für x_k, y_k, x_j bzw. y_j.*

⋆ **1.18** *Zeige Gleichung (1.32) durch vollständige Induktion.*

⋆ **1.19** *Beweise die Cauchy[48]-Schwarzsche[49] Ungleichung*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k^2$$

für $x_k, y_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, \ldots, n)$.

∘ **1.20** *Zeige die Ungleichung*

$$2^n < n!$$

für $n \geq 4$.

∘ **1.21** *Zeige, daß für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ gilt:*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \ .$$

∘ **1.22** *Zeige, daß für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ die Gleichung*

$$x^n - y^n = (x - y) \left(x^{n-1} + x^{n-2} y + \cdots + x y^{n-2} + y^{n-1} \right)$$

gilt und schreibe die rechte Seite mit dem Summenzeichen.

[48] Augustin-Louis Cauchy [1789–1857]
[49] Hermann Amandus Schwarz [1843–1921]

◇ **1.23** *Löse Gleichungen* (1.26) *und* (1.27) *mit* DERIVE. *Zeige Gleichungen* (1.4) *und* (1.28) *mit* DERIVE. *Faktorisiere dazu die linken Seiten.*

◇ **1.24** *Vereinfache* $|x| \cdot \operatorname{sign} x$ *mit* `Simplify` *in* DERIVE *und beweise das Resultat.*

◇ **1.25** *Bestimme die Werte von*

$$b(m,n) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^m \qquad (n \in \mathbb{N} \ \ (0 \le m \le n-1))$$

für $n := 1, \ldots, 5$ *mit* DERIVE. *Beweise das sich offenbarende Resultat durch Induktion. Wie lautet das Ergebnis für* $m = n$*?*

⋆ **1.26** *Zeige, daß für jedes* $n \in \mathbb{N}$

(a) $(n!)^2 \ge n^n$, (b) $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots n^n \le n^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

◇ **1.27** *Löse die Gleichung*

$$1 - \frac{x}{1} + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} - \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \pm \cdots + (-1)^n \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{n!} = 0 \ .$$

Hinweis: *Benutze* DERIVE, *um die Gleichung für* $n = 1, 2, \ldots, 5$ *zu lösen, und errate die allgemeine Lösung. Führe dann einen Induktionsbeweis.*

⋆ **1.28** *Löse das Gleichungssystem*

$$x^2 = a + (y-z)^2 \ , \qquad y^2 = b + (z-x)^2 \ , \qquad z^2 = c + (x-y)^2 \ ,$$

nach den Unbekannten x, y *und* z *auf.*

1.5 Zwei fundamentale Eigenschaften der reellen Zahlen

In diesem Abschnitt behandeln wir eine fundamentale Eigenschaft des Systems der reellen Zahlen, die die *Supremumseigenschaft* genannt wird und die das wesentliche Unterscheidungsmerkmal zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ darstellt. Wir werden zeigen, daß $\mathbb{R}$ als Folge der Supremumseigenschaft eine weitere wichtige Eigenschaft hat, die wir *Intervallschachtelungseigenschaft* nennen. Beide Eigenschaften werden wir an verschiedenen Stellen dieses Buchs immer wieder brauchen. Um die Supremumseigenschaft formulieren zu können, benötigen wir einige Definitionen.

Definition 1.8 (Obere und untere Schranke, Beschränktheit) Sei irgendeine Menge $M \subset \mathbb{R}$ reeller Zahlen gegeben. Eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ heißt *obere Schranke* von M, wenn für alle $m \in M$ die Ungleichung $m \le c$ gilt. Entsprechend heißt $c \in \mathbb{R}$ *untere Schranke* von M, wenn für alle $m \in M$ die Ungleichung $c \le m$ gilt. Hat M eine obere Schranke, so heißt M *nach oben beschränkt*, wohingegen M bei Existenz einer unteren Schranke *nach unten beschränkt* genannt wird. Ist M sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt, so nennen wir M *beschränkt*[50], andernfalls *unbeschränkt*.

[50] Englisch: bounded

Beispiel 1.7 (Intervalle) Für ein Intervall $I = (a, b)$ ist z. B. $b+1$ eine obere und $a-10$ eine untere Schranke, folglich ist I beschränkt. Es gibt aber unendlich viele weitere obere und untere Schranken von I. Hat eine Menge M nämlich eine obere Schranke, so ist jede größere Zahl auch eine obere Schranke von M. Es gibt aber eine ausgezeichnete obere Schranke im Falle unseres Intervalls I, nämlich die Zahl b, welche nicht nur eine obere Schranke von I ist, sondern sogar die kleinstmögliche, d. h. es gibt keine weitere obere Schranke von I, die noch kleiner ist.

Definition 1.9 (Supremum und Infimum) Wir nennen die Zahl $c \in \mathbb{R}$ die *kleinste obere Schranke*[51] einer Menge $M \subset \mathbb{R}$, wenn c eine obere Schranke von M ist und wenn zudem für jede weitere obere Schranke d die Ungleichung $c \leq d$ gilt. Entsprechend heißt c die *größte untere Schranke*[52] von M, wenn c eine untere Schranke von M ist und wenn zudem für jede weitere untere Schranke d die Ungleichung $d \leq c$ gilt. Die kleinste obere Schranke c einer Menge M wird auch *Supremum* von M genannt und mit $c = \sup M$ abgekürzt. Entsprechend nennt man die größte untere Schranke c von M auch *Infimum* von M, und wir verwenden die Schreibweise $c = \inf M$. Liegen $\sup M$ bzw. $\inf M$ sogar in M, hat also M ein größtes bzw. kleinstes Element, so wird dies das *Maximum* bzw. *Minimum* von M genannt und mit $\max M$ bzw. $\min M$ bezeichnet. $\triangle$

Nun können wir die Supremumseigenschaft der reellen Zahlen formulieren.

REGEL 13: (Supremumseigenschaft[53]*)*
Jede nichtleere nach oben beschränkte Menge $M \subset \mathbb{R}$ reeller Zahlen hat ein Supremum.

Es ist klar, daß die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen die Supremumseigenschaft *nicht* besitzt. Zum Beispiel hat die Menge

$$M := \left\{x \in \mathbb{Q} \;\middle|\; x^2 < 2\right\}$$

kein Supremum in $\mathbb{Q}$, da man sonst folgern könnte, daß $\sqrt{2}$ rational ist. Nun stellen wir eine Beziehung her zwischen der Supremumseigenschaft und Approximationen.

Wir betrachten $\sqrt{2}$ als eine Zahl, die zwar nicht rational ist, aber beliebig genau durch rationale Zahlen angenähert werden kann. Deshalb gaben wir in DERIVE-Sitzung 1.5 eine Folge *schrumpfender geschachtelter Intervalle* ($I_1 = [1, 2]$, $I_2 = [1.4, 1.5], I_3 = [1.41, 1.42], I_4 = [1.414, 1.415], I_5 = [1.4142, 1.4143], \ldots$) an, von denen wir *annehmen*, daß sie gegen eine reelle Zahl konvergieren[54].

[51] Englisch: least upper bound
[52] Englisch: greatest lower bound
[53] Aus Symmetriegründen gilt auch eine entsprechende Infimumseigenschaft, siehe Übungsaufgabe 1.30.
[54] Diese Annahme ist für $\mathbb{Q}$ falsch.

Definition 1.10 (Schrumpfende Intervallschachtelung) Die Aussage, daß die Intervalle geschachtelt sind, bedeutet dabei, daß $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$ gilt, und die Aussage, daß sie schrumpfen, heißt, daß die Längen $|I_k|$ der Intervalle $I_k := [a_k, b_k]$, also $|I_k| = b_k - a_k$, gegen Null streben, wenn k gegen unendlich strebt.[55]

REGEL 14: (Intervallschachtelungseigenschaft)
Zu jeder Folge schrumpfender geschachtelter Intervalle I_k $(k \in \mathbb{N})$, $I_k \subset \mathbb{R}$, gibt es eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft[56]

$$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} [a_k, b_k] = \{c\} .$$

$\mathbb{Q}$ besitzt die Intervallschachtelungseigenschaft nicht, da sonst wieder $\sqrt{2}$ rational wäre. Die Intervallschachtelungseigenschaft ist also eine andere Möglichkeit, den Unterschied zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ zu präzisieren. Sie macht $\mathbb{R}$ *vollständig*[57], d. h. sie garantiert, daß alle konvergenten Folgen – wie z. B. Dezimaldarstellungen –, reelle Zahlen darstellen. Die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ wird genauer in Kapitel 4 untersucht.

Zunächst werden wir nachweisen, daß jede schrumpfende Intervallschachtelung (auch ohne Verwendung der Regel 14) *höchstens* einen Punkt gemeinsam haben kann[58].

Lemma 1.1 Jede schrumpfende Intervallschachtelung I_k $(k \in \mathbb{N})$, $I_k \subset \mathbb{R}$, hat höchstens einen Punkt $c \in I_k$ $(k \in \mathbb{N})$ gemeinsam.

Beweis: Wir nehmen an, die schrumpfende Intervallschachtelung habe die zwei Punkte $c \neq d$ gemeinsam. Dann ist

$$e := |c - d| > 0 . \tag{1.33}$$

Ferner gelten für alle $k \in \mathbb{N}$ die Beziehungen

$$a_k \leq c \leq b_k \qquad \text{und} \qquad a_k \leq d \leq b_k .$$

Da $[a_k, b_k]$ schrumpft, $b_k - a_k$ also gegen 0 strebt, gibt es offenbar ein $K \in \mathbb{N}$ derart[59], daß $b_K - a_K \leq \frac{e}{3}$. Dann gelten aber auch die Beziehungen

$$c - a_K \leq b_K - a_K \leq \frac{e}{3} \qquad \text{und} \qquad d - a_K \leq b_K - a_K \leq \frac{e}{3} ,$$

und schließlich mit der Dreiecksungleichung

$$|c - d| = |c - a_K + a_K - d| = |(c - a_K) + (a_K - d)| \leq |c - a_K| + |a_K - d| \leq \frac{e}{3} + \frac{e}{3} = \frac{2e}{3}$$

im Widerspruch zu Gleichung (1.33). □

[55] Eine mathematisch exakte Definition dieser intuitiv verständlichen Eigenschaft wird in Kapitel 4 gegeben.

[56] Mit $\bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} M_k$ bezeichnen wir den Durchschnitt aller Mengen M_k $(k \in \mathbb{N})$.

[57] Englisch: complete

[58] Ein Lemma ist eine relativ einfache Aussage, die dazu benutzt wird, um schwerere Resultate zu beweisen, also ein Hilfssatz.

[59] Daß dies so ist, ist intuitiv klar, und wird genauer in Kapitel 4 untersucht.

Dies ist das erste Mal, daß wir eine Beweisführung durch Ungleichungen mit Hilfe der Dreiecksungleichung geführt haben. Diese Methode zieht sich wie ein roter Faden durch die gesamte Analysis und auch durch dieses Buch.

Wir zeigen nun, daß die Intervallschachtelungseigenschaft eine Folge der Supremumseigenschaft ist.

Satz 1.2 Aus der Supremumseigenschaft folgt die Intervallschachtelungseigenschaft.

Beweis: Gelte die Supremumseigenschaft. Wir wollen zeigen, daß für eine beliebige vorgegebene Folge schrumpfender geschachtelter Intervalle $[a_k, b_k]$ $(k \in \mathbb{N})$ eine reelle Zahl existiert, die allen Intervallen gemeinsam ist. Wegen Lemma 1.1 wissen wir, daß es ja höchstens einen solchen Punkt geben kann. Zu diesem Zweck betrachten wir die folgende Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b_k \text{ für alle } k \in \mathbb{N}\} \ .$$

Da für alle $k \in \mathbb{N}$ die Beziehung $a_k \leq b_k$ gilt, sind alle Zahlen a_k Elemente von M, und M ist somit nicht leer. Als nächstes stellen wir fest, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ die Zahl b_k eine obere Schranke von M ist, womit M nach oben beschränkt ist. Auf Grund der Supremumseigenschaft hat M also ein Supremum $c = \sup M \in \mathbb{R}$. Wir werden nun zeigen, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ die Beziehungen

$$c \in [a_k, b_k] \quad \text{oder äquivalent} \quad a_k \leq c \leq b_k \quad \text{oder äquivalent} \quad a_k \leq c \ \text{ und } \ c \leq b_k \tag{1.34}$$

gelten, so daß c diejenige reelle Zahl ist, die in allen Intervallen $[a_k, b_k]$ liegt, nach der wir suchen.

Da für alle $k \in \mathbb{N}$ die Zahl a_k in M liegt und c eine obere Schranke von M ist, gilt

$$a_k \leq c$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, und die erste Ungleichung von (1.34) ist bewiesen. Weil weiter für alle $k \in \mathbb{N}$ die Zahl b_k eine obere Schranke und weil c die kleinste obere Schranke von M ist, gilt auch die Ungleichung

$$c \leq b_k$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gemäß der Definition des Supremums, und wir sind fertig. □

Übungsaufgaben

1.29 *Bei der Definition* 1.9 *des Supremums und Infimums sprachen wir von der kleinsten oberen und der größten unteren Schranke. Zeige, daß in der Tat höchstens jeweils ein solches Objekt existieren kann.*

1.30 *Formuliere eine der Supremumseigenschaft entsprechende Infimumseigenschaft und zeige, daß diese in* $\mathbb{R}$ *gültig ist.*

∘ **1.31** *Hat* $\mathbb{N}$ *obere oder untere Schranken? Ist* $\mathbb{N}$ *nach oben oder nach unten beschränkt?*

∘ **1.32 (Archimedische[60] Eigenschaft)** *Zeige, daß die reellen Zahlen die archimedische Eigenschaft haben: Zu je zwei positiven reellen Zahlen* $x, y \in \mathbb{R}^+$ *gibt es eine natürliche Zahl* $n \in \mathbb{N}$ *derart, daß* $x < n \cdot y$ *gilt.* Hinweis: *Verwende die Unbeschränktheit von* $\mathbb{N}$, *s. Übungsaufgabe* 1.31.
Wegen dieser Eigenschaft sagt man, der Körper $\mathbb{R}$ *(wie auch* $\mathbb{Q}$*) sei archimedisch angeordnet.*

[60] Archimedes [287?–212 v. Chr.]

⋆ **1.33** *Zeige, daß in jedem reellen Intervall $I = (a, b)$ mindestens eine und damit unendlich viele rationale Zahlen liegen.* Hinweis: *Verwende die Archimedische Eigenschaft, s. Übungsaufgabe* 1.32.

1.34 *Zeige: Es gilt $c = \sup M$ genau dann, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl $m \in M$ existiert, derart, daß die Ungleichungskette*

$$c - \frac{1}{n} \leq m \leq c$$

erfüllt ist.

1.35 *Zeige: Gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichungskette $0 \leq a \leq \frac{1}{n}$, so ist $a = 0$.*

1.36 *Bestimme die Suprema und Infima der folgenden Mengen reeller Zahlen.*

$$\text{(a)} \ \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 < 3\right\} \ , \quad \text{(b)} \ \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 > 3\right\} \ , \quad \text{(c)} \ \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^3 < 2\right\} \ ,$$

$$\text{(d)} \ \left\{\frac{n-1}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\} \ , \quad \text{(e)} \ \left\{\frac{(-1)^n}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\} \ , \quad \text{(f)} \ \left\{\frac{1}{1+x^2} \;\middle|\; x \in \mathbb{Q}\right\} \ .$$

Welche der Suprema und Infima sind Maxima bzw. Minima?

1.37 *Zeige durch Induktion, daß jede endliche Menge reeller Zahlen ein Maximum und ein Minumum besitzt.*

1.6 Die komplexen Zahlen

Das reelle Zahlensystem wurde so definiert, daß die quadratische Gleichung $x^2 = 2$ eine Lösung hat. Es zeigt sich jedoch, daß die quadratische Gleichung

$$x^2 = -1 \tag{1.35}$$

keine reelle Lösung besitzt. Dies liegt daran, daß die Quadrate aller reellen Zahlen außer 0 positiv sind (s. Teil (b) von Satz 1.1) und $0^2 = 0$ gilt. Deshalb kann keine reelle Zahl Gleichung (1.35) erfüllen.

Aus diesem Grund erzeugt man eine neue Zahlenmenge, indem man eine Lösung von Gleichung (1.35) zu $\mathbb{R}$ hinzufügt. Diese Lösung bezeichnen wir mit i und nennen sie die *imaginäre Einheit*[61]. Es gilt also *per definitionem*

$$i^2 = -1 \ . \tag{1.36}$$

Da wir i mit reellen Zahlen addieren und multiplizieren wollen, betrachten wir die Menge der *komplexen Zahlen*[62]

$$\mathbb{C} := \{z = x + i \cdot y \ \mid x, y \in \mathbb{R}\} \ .$$

[61] Englisch: imaginary unit
[62] Englisch: set of complex numbers

Die reellen Zahlen sind diejenigen komplexen Zahlen, die die Form $x + i \cdot 0$ haben. Für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ heißt die reelle Zahl x der *Realteil*[63] von z, und die reelle Zahl y heißt *Imaginärteil*[64] von z. Wir schreiben $x = \mathrm{Re}\, z$ und $y = \mathrm{Im}\, z$.

Wie funktionieren nun die Addition und die Multiplikation komplexer Zahlen? Dazu muß man nur Gleichung (1.36) anwenden, wenn die imaginäre Einheit auftritt. Für die komplexen Zahlen $z := x + iy$ und $w := u + iv$ gilt dann

$$z + w = (x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i \cdot (y + v) \tag{1.37}$$

und

$$z \cdot w = (x+iy) \cdot (u+iv) = xu + xiv + iyu + i^2 yv = (xu - yv) + i \cdot (xv + yu) \; . \tag{1.38}$$

Dabei haben wir Gleichung (1.36) verwendet und angenommen, daß die Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetze gelten. Tatsächlich *definiert* man die Additions- und die Multiplikationsoperation in $\mathbb{C}$ durch die Regeln (1.37)–(1.38). Es zeigt sich, daß $\mathbb{C}$ mit diesen beiden Operationen denselben Regeln 1–9 genügt, die auch für die reellen Zahlen gelten. Eine solche Menge nannten wir einen *Körper*. Somit ist $\mathbb{C}$, genauso wie $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$, ein Körper, der allerdings *nicht* angeordnet ist, da wegen (1.36) die Anordnungsaxiome (Regeln 10–12) nicht erfüllt sein können.

Man beachte, daß $0 = 0 + i \cdot 0$ und $1 = 1 + i \cdot 0$ die neutralen Elemente bzgl. der Addition und der Multiplikation für $\mathbb{C}$ sind und daß

$$-z := -x + i \cdot (-y)$$

und

$$\frac{1}{z} := \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \cdot \frac{-y}{x^2 + y^2} \tag{1.39}$$

die Inversen der Addition bzw. der Multiplikation darstellen, s. auch Übungsaufgabe 1.38. Bei der Betrachtung des Kehrwerts (1.39) einer komplexen Zahl $z = x+iy \neq 0$ bekamen wir eine übliche Darstellung in der Form $a + ib$, $(a, b \in \mathbb{R})$, indem wir mit $\overline{z} := x - iy$ erweiterten. Das Produkt $z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$ ist nämlich positiv. Die Zahl $\overline{z}$ heißt die zu z *konjugiert-komplexe Zahl*. Mit Hilfe der konjugiert-komplexen Zahl kann man

$$\frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{(x + iy) + (x - iy)}{2} = x = \mathrm{Re}\, z$$

und

$$\frac{z - \overline{z}}{2i} = \frac{(x + iy) - (x - iy)}{2i} = y = \mathrm{Im}\, z$$

schreiben. Darüberhinaus ist die Bildung der konjugiert-komplexen Zahl mit dem komplexen Produkt vertauschbar

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} \; , \tag{1.40}$$

wie man leicht nachprüfen kann.

[63] Englisch: real part
[64] Englisch: imaginary part

Sitzung 1.7 Man kann in DERIVE mit komplexen Zahlen arbeiten. Die imaginäre Einheit wird eingegeben, indem man die `<ALT>` Taste niederdrückt und `i` eingibt (`<ALT>I`) oder indem man `#i` schreibt. Die imaginäre Einheit wird durch $\hat{\imath}$ auf dem Bildschirm dargestellt. Die konjugiert-komplexe Zahl $\overline{z}$ von z heißt bei DERIVE `CONJ(z)`, die Schreibweise für den Real- und den Imaginärteil lautet `RE(z)` und `IM(z)`.

Man gebe `(x+îy)(u+îv)` als $\boxed{\texttt{Author}}$ Kommando ein. Nach Vereinfachung mit $\boxed{\texttt{Simplify}}$ erhält man wieder Gleichung (1.38). Deklariere die Variable z durch Eingabe von `z:=x+îy`. Man vereinfache mit $\boxed{\texttt{Simplify}}$ $-z$ und $1/z$ und – nach der Deklaration `w:=u+îv` – die Ausdrücke $z \cdot w$ und z/w. Vereinfache mit $\boxed{\texttt{Simplify}}$ die Ausdrücke $z \cdot \overline{z}$, $(z+\overline{z})/2$ und $(z-\overline{z})/(2i)$. Überprüfe Gleichung (1.40)! Löse die quadratische Gleichung $x^2 + 2x + 2 = 0$ mit DERIVE!

Die Konstruktion von $\mathbb{C}$ garantiert, daß alle quadratischen Gleichungen innerhalb von $\mathbb{C}$ gelöst werden können. Dies ist ein Spezialfall eines grundlegenden Ergebnisses – des *Fundamentalsatzes der Algebra*[65].

Satz 1.3 (Fundamentalsatz der Algebra) Jede Gleichung der Form

$$\sum_{k=0}^{n} a_k z^k = 0 \quad (a_k \in \mathbb{C} \quad (k = 0, \ldots, n)) ,$$

wobei z eine komplexe Variable ist, hat eine komplexe Lösung.

Übungsaufgaben

∘ **1.38** *Beweise, daß* $\mathbb{C}$ *mit den Operationen, die durch die Gleichungen* (1.37) *und* (1.38) *erklärt werden, ein Körper ist, also den Regeln* 1–9 *genügt.*

1.39 (Binomischer Lehrsatz) *Man zeige, daß der Binomische Lehrsatz*

$$(1.29) \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \qquad (n \in \mathbb{N}_0)$$

auch für alle $a, b \in \mathbb{C}$ *gültig ist.* Hinweis: $\mathbb{C}$ *ist Körper.*

1.40 *Sei* $z := x + iy$ *und* $w := u + iv$. *Berechne* z/w *von Hand.*

1.41 *Sei* $z := x + iy$. *Berechne* $\operatorname{Re} \frac{1+z}{1-z}$. Hinweis: *Erweitere den Bruch mit* $(1 - \overline{z})$.

1.42 *Berechne zunächst* $1/i$ *und dann allgemein* i^n *für* $n \in \mathbb{Z}$.

⋆ **1.43** *Bestimme die Summen*

(a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \ldots ,$ (b) $\binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \ldots ,$

(c) $\binom{n}{2} + \binom{n}{6} + \binom{n}{10} + \ldots ,$ (d) $\binom{n}{3} + \binom{n}{7} + \binom{n}{11} + \ldots$

für $n \in \mathbb{N}$. Hinweis: *Man entwickle* $(1+1)^n$, $(1-1)^n$, $(1+i)^n$ *und* $(1-i)^n$ *mit dem Binomischen Lehrsatz und kombiniere auf geeignete Weise.*

[65] Einen Beweis dieses Satzes geben wir nicht. Dies wird üblicherweise in der *komplexen Analysis*, die man auch *Funktionentheorie* nennt, getan. Eine Sammlung von Beweisen findet man auch in dem Band [Zahlen].

1.7 Abzählbare und überabzählbare Mengen

Wir haben nun einige Mengen kennengelernt, die unendlich viele Elemente enthalten, nämlich $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$. In diesem Abschnitt werden wir sehen, daß es ein weiteres wesentliches Unterscheidungsmerkmal zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ gibt: In gewisser Beziehung gibt es viel mehr irrationale als rationale Zahlen. Genauer gilt: Die rationalen Zahlen lassen sich durchnumerieren, die irrationalen nicht.

Definition 1.11 (Abzählbare und überabzählbare Mengen) Ein Menge M, deren Elemente sich durchnumerieren lassen

$$M = \{m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots\} \tag{1.41}$$

heißt *abzählbar*[66]. Ist eine Menge M nicht abzählbar, nennen wir sie *überabzählbar.*

Beispiel 1.8 (Endliche Mengen sind abzählbar) Natürlich ist jede endliche Menge abzählbar. Man wählt sich ein beliebiges Element aus, gibt ihm die Nummer 1 bzw. den Namen m_1 (gemäß (1.41)). Danach wählt man nacheinander ein noch nicht numeriertes Element aus, gibt ihm die nächste zu vergebende Nummer und fährt solange fort, bis alle Elemente aufgebraucht sind. Da die Menge nur endlich viele Elemente hat, ist man nach endlich vielen Schritten fertig und alle Elemente sind numeriert.

Beispiel 1.9 ($\mathbb{N}$ und verwandte Mengen) Die Menge der positiven natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ ist *das Musterbeispiel* einer abzählbaren Menge, da jede natürliche Zahl gerade einer der zu vergebenden Nummern entspricht.

$n \in \mathbb{N}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...

.

Aber auch die Menge der positiven geraden Zahlen

$$G := \{g \in \mathbb{N} \mid g \text{ ist gerade } \} = \{2, 4, 6, \ldots\}$$

ist abzählbar. Das sieht man an der Numerierung

$g \in G$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	...
Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...

.

Weiter ist die Menge

$$P := \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ ist nur durch 1 und } p \text{ teilbar}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots\}$$

der Primzahlen abzählbar:

[66] Englisch: countable set

$p \in P$	2	3	5	7	11	13	17	19	23	...
Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...

.

Schließlich ist auch die Menge $\mathbb{N}_0$ abzählbar:

$n \in \mathbb{N}_0$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...

.

Beispiel 1.10 ($\mathbb{Z}$ ist abzählbar) $\mathbb{N}_0$ war ein Beispiel einer *Obermenge* von $\mathbb{N}$, die trotzdem abzählbar ist. Wir werden sehen, daß wir noch wesentlich mehr Zahlen dazunehmen können, ohne die Klasse der abzählbaren Mengen zu verlassen. Wie können wir $\mathbb{Z}$ durchnumerieren? Nun, wir können *nicht* zunächst die positiven Zahlen durchnumerieren und danach die negativen, da dann bereits nach der ersten Hälfte der Prozedur die Nummern ausgegangen sind. Wir können jedoch immer *abwechselnd* eine positive und eine negative Zahl numerieren, und erfassen so offenbar alle ganzen Zahlen:

$n \in \mathbb{Z}$	0	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	...
Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...

.

Beispiel 1.11 ($\mathbb{Q}$ ist abzählbar) Auf den ersten Blick scheint es unwahrscheinlich, daß sich auch die rationalen Zahlen durchnumerieren lassen, da die Elemente dieser Menge auf dem Zahlenstrahl dicht liegen, d. h. zwischen je zwei rationalen Zahlen liegen ja unendlich viele weitere. Andererseits haben wir aus dem letzten Beispiel gelernt, daß man durch geschickte Wahl der Reihenfolge allerhand erreichen kann. Bei $\mathbb{Q}$ gehen wir folgendermaßen vor. Die Zahl 0 bekommt die Nummer 1. Die restlichen rationalen Zahlen haben alle eine Darstellung als Bruch $\pm\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{N}$. Diese Zahlen können wir offensichtlich in folgendem quadratischen Schema anordnen:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & -4 & 5 & -5 & \dots \\[1ex]
\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & -\frac{2}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{4}{2} & -\frac{4}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & \dots \\[1ex]
\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{3}{3} & -\frac{3}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{5}{3} & \dots \\[1ex]
\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & -\frac{2}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{4}{4} & -\frac{4}{4} & \frac{5}{4} & -\frac{5}{4} & \dots \\[1ex]
\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{5}{5} & -\frac{5}{5} & \dots \\[1ex]
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Jede rationale Zahl (außer 0) kommt in diesem Schema mindestens einmal vor.[67] Eine Durchnumerierung bekommen wir nun z. B. durch folgendes Diagonalverfahren: Man starte in obigem Schema links oben in der Ecke (bei der 1), gehe dann um ein Feld nach rechts (zur -1), laufe längs der Diagonalen nach links unten weiter (zu $1/2$), gehe dann um ein Feld nach unten (zu $1/3$), um dann wieder längs der Diagonalen nach rechts oben weiterzufahren, usw. Schließlich numeriere man die Zahlen derart, daß jede rationale Zahl nur bei ihrem *ersten* Auftreten notiert wird. Der Anfang dieser numerierten Liste sieht dann folgendermaßen aus:

$q \in \mathbb{Q}$	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	2	-2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	3	$\ldots$
Nummer	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	$\ldots$

Da jede rationale Zahl nun genau eine Nummer hat, ist $\mathbb{Q}$ abzählbar. $\triangle$

Nach all den Beispielen abzählbarer Mengen wird man sich fragen: Gibt es vielleicht überhaupt keine überabzählbaren Mengen? Das wesentliche Ergebnis dieses Abschnitts ist die Aussage, daß die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ überabzählbar ist!

Satz 1.4 ($\mathbb{R}$ ist überabzählbar) Die Menge $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Beweis: Wenn $\mathbb{R}$ überabzählbar ist, so kann dies – nachdem $\mathbb{Q}$ ja abzählbar war – nur an derjenigen Regel liegen, die $\mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}$ unterschied: am Intervallschachtelungsaxiom. Wir formulieren die Aussage des Satzes um: Sei eine beliebige durchnumerierte Menge $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ reeller Zahlen gegeben. Dann gibt es immer eine reelle Zahl x, die nicht in M enthalten ist[68]. Sei also M beliebig vorgegeben. Wir konstruieren eine Intervallschachtelung, der wir konstruktionsgemäß ansehen können, daß in ihrem Durchschnitt keine der Zahlen $m_1, m_2, \ldots$ enthalten ist.

Wir wählen dazu zuerst ein Intervall $I_1 = [a_1, b_1]$ der Länge $|I_1| = 1$ derart aus, daß der erste Wert aus M, also m_1, nicht in I_1 enthalten ist, z. B. $I_1 = [m_1 + 1, m_1 + 2]$. Danach teilen wir I_1 in drei gleich große Teilintervalle der Länge $1/3$.[69] In wenigstens einem dieser Teilintervalle kommt m_2 nicht vor. Von denjenigen Teilintervallen mit dieser Eigenschaft suchen wir eines aus und nennen es I_2. Offenbar gilt dann $I_2 \subset I_1$ und $|I_2| = \frac{1}{3}$. Wir fahren nun fort, das jeweilig übrigbleibende Intervall I_{k-1} zu dritteln und das neue Intervall I_k so auszuwählen, daß m_k nicht in I_k enthalten ist. Wir bekommen so schließlich eine schrumpfende Intervallschachtelung $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset I_4 \ldots$ mit $|I_k| = \frac{1}{3^k}$, welche nach dem Intervallschachtelungsaxiom ein gemeinsames reelles Element $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k$ hat. Gemäß Konstruktion ist für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Zahl $m_k \notin I_k$, und somit erst recht $m_k \notin \bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k$. Somit ist tatsächlich $x \in \mathbb{R} \setminus M$. $\square$

Eine weitere wichtige Begriffsbildung ist die des Mengenprodukts.

[67] Tatsächlich kommt jede rationale Zahl sogar *unendlich oft* in dieser Liste vor! Daher gibt es offenbar unendlich mal *mehr* natürliche als rationale Zahlen! Es ist schon ein Kreuz mit dem Unendlichen. . .

[68] Man mache sich klar, warum daraus unser Satz folgt!

[69] Man überlege sich, warum wir das Intervall nicht einfach halbieren.

Definition 1.12 (Kreuzprodukt zweier Mengen) Mit $A \times B$ bezeichnen wir die Menge der Paare

$$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A \ \text{ und } \ b \in B\} \ ,$$

und nennen diese Menge das *Kreuzprodukt* der Mengen A und B. Ist $A = B$, so schreiben wir auch $A^2 := A \times A$ und ferner rekursiv ($n \in \mathbb{N}$)

$$A^n := \begin{cases} A \times A^{n-1} = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n-\text{mal}} & \text{falls } n > 1 \\ A & \text{falls } n = 1 \end{cases} .$$

Beispielsweise ist $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$) die Menge der sogenannten *n-tupel*[70] *reeller (komplexer) Zahlen.*

Ist A überabzählbar, so ist auch A^n überabzählbar. In Übungsaufgabe 1.44 soll man zeigen, daß andererseits für abzählbares A auch A^n abzählbar ist.

Übungsaufgaben

1.44 *Zeige, daß für eine abzählbare Menge A auch A^n abzählbar ist. Insbesondere: $\mathbb{Q}^n$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ abzählbar.* Hinweis: *Man mache eine ähnliche Konstruktion wie in Beispiel* 1.11.

[70] Als Fortsetzung von Quartupel, Quintupel, ...